ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Том 2

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ ДЛЯ БАКАЛАВРИАТА И МАГИСТРАТУРЫ

Под редакцией доктора экономических наук,
профессора **В. Г. Халина**

*Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по экономическим направлениям и специальностям*

Москва ▪ Юрайт ▪ 2016

УДК 519.816(075.8)
ББК 22.18я73
Т33

***Ответственный редактор*:**

Халин Владимир Георгиевич — доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных систем в экономике экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета, почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации.

***Рецензенты*:**

Волкова В. Н. — профессор, доктор экономических наук, профессор кафедры системного анализа и управления Института информационных технологий и управления Санкт-Петербургского государственного политехнического университета Петра Великого, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации;

Первухин Д. А. — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой системного анализа и управления Национального минерально-сырьевого университета «Горный».

Теория принятия решений. В 2 т. Т. 2 : учебник и практикум для бакалавриата
Т33 и магистратуры / под ред. В. Г. Халина. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 431 с. — Серия : Бакалавр и магистр. Академический курс.

ISBN 978-5-9916-6965-8 (т. 2)
ISBN 978-5-9916-6077-8

Содержанием данного двухтомного издания является раскрытие основных теоретических вопросов, связанных с названными аспектами процессов принятия решений, а также демонстрация применения фундаментальных, базовых понятий теории принятия решений на практике. Второй том учебника посвящен раскрытию основных методов решения многокритериальных задач, задач и методов принятия решений в условиях неопределенности, а также вопросов информационной поддержки принятия решений.

Содержание учебника соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов, аспирантов и преподавателей экономических вузов, практических работников и специалистов, изучающих теоретические, концептуальные и практические вопросы принятия управленческих решений, а также создания и функционирования систем поддержки принятия решений.

УДК 519.816(075.8)
ББК 22.18я73

ISBN 978-5-9916-6965-8 (т. 2)
ISBN 978-5-9916-6077-8

Оглавление

ПРАКТИКУМ

Авторский коллектив

Аксенова Ольга Анатольевна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета — гл. 11, гл. 12, параграфы 12.5—12.6, гл. 16;

Аплеев Даниил Борисович, управляющий активами ЗАО «ИК ЛОКО-Инвест» — гл. 17, параграф 17.7 (совместно с Юрковым А. В.), кейс № 2;

Ботвин Геннадий Алексеевич, кандидат технических наук, профессор кафедры информационных систем в экономике экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета — гл. 12, параграфы 12.1 — 12.4;

Валиотти Николай Александрович, кандидат экономических наук, руководитель департамента клиентского маркетинга Непубличного акционерного общества «Юлмарт» — кейс № 3;

Губар Елена Алексеевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории игр и статистических решений факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета — гл. 14 (совместно с Кумачёвой С. Ш.), гл. 15 (совместно с Кумачёвой С. Ш.);

Джаксумбаева Ольга Ильинична, кандидат экономических наук, ведущий консультант отдела управления проектами ООО «Систематика» — кейс № 4 (совместно с Русаковым О. В.);

Забоев Михаил Валерьевич, кандидат экономических наук, доцент кафедры информационных систем в экономике экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета — гл. 18, гл. 19, кейс № 1, кейс № 5 (совместно с Мазяркиной М. П.);

Кумачёва Сурия Шакировна, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры математической теории игр и статистических решений факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета — гл. 14 (совместно с Губар Е. А.), гл. 15 (совместно с Губар Е. А.);

Мазяркина Мария Петровна, аспирант кафедры информационных систем в экономике экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета — кейс № 5 (совместно с Забоевым М. В.);

Рожков Николай Николаевич, доктор технических наук, профессор кафедры математики, директор института бизнес-коммуникаций Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна — гл. 10;

Русаков Олег Витальевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета — кейс № 4 (совместно с Джаксумбаевой О. И.);

Халин Владимир Георгиевич, доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных систем в экономике экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета, почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации — гл. 13 (совместно с Черновой Г. В.);

Чернова Галина Васильевна, доктор экономических наук, профессор кафедры управления рисками и страхования экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации — гл. 13 (совместно с Халиным В. Г.);

Юрков Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем в экономике экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета — гл. 17, параграфы 17.1—17.6; параграф 17.7 (совместно с Аплеевым Д. Б.);

Юрков Дмитрий Александрович, ведущий консультант отдела управления проектами ООО «Систематика» — кейс № 6.

Предисловие

Содержание второго тома учебника является логическим продолжением содержания первого тома. В первом томе раскрыты основные методологические и математические аспекты принятия решений, а во втором — основные методы решения многокритериальных задач, задачи и методы принятия решений в условиях неопределенности, а также вопросы информационной поддержки принятия решений.

В **разд. III** второго тома учебника дано описание многокритериальных методов принятия решений.

Главы 10 и 11 этого раздела посвящены рассмотрению методов решения многокритериальных задач. Так, *гл. 10* содержит описание специфики исходных данных, определяющей возможности применения различных методов анализа решений при многих критериях. В ней еще раз подчеркнута роль психологических факторов при построении и выборе различных предпочтений. В главе даны примеры методов принятия решений при числовых исходных данных, при нечетких и нечисловых исходных данных. Самостоятельно рассмотрены вопросы линейной свертки критериев, построения коэффициентов весомости. Показаны математические алгоритмы и механизмы сведения многокритериальных задач к однокритериальным. Приведенные положения теории иллюстрируются практическими примерами.

В *гл. 11* этого раздела раскрыто содержание целевого программирования, дано описание целевого множества, идеальной точки, удаленности векторной оценки варианта от целевого множества. Также раскрыты вопросы сведения задачи целевого программирования при линейных критериях и ограничениях к задаче линейного программирования. В главе подробно рассматриваются метод анализа иерархий; структура иерархий принятия решений: цель, критерии, альтернативы; отношения предпочтений; матрицы парных сравнений. Самостоятельно раскрывается вопрос оценивания коэффициентов весомости критериев и значений критериев для вариантов по результатам парных сравнений. Описаны вопросы определения векторов приоритетов как собственных векторов матриц парных сравнений; анализа согласованности матриц парных сравнений на основе их собственных чисел; формирования итоговых приоритетов альтернатив.

Одним из важнейших аспектов принятия решений является вопрос формирования критериев и выбора среди них важнейших. Именно этому и посвящена *гл. 12*. В ней, прежде всего, дается подробный анализ многокритериальных задач принятия решений. При рассмотрении критериев, используемых в этих задачах, раскрывается понятие их однородности. В главе приведены подробное описание и анализ методов определения качественной и количественной важности критериев. Особое место в главе уделено вопросам отношений предпочтения для сужения множества Парето — Эджворта и сужению множества Парето — Эджворта на основе использования информации о важности критериев.

Так как существенную роль при принятии любого решения может играть экономический риск, т.е. неопределенная возможность возникновения ущерба, измеренном в денежном выражении, необходимо ознакомиться с возможными методами управления риском как самостоятельным объектом управления. В *гл. 13* учебника раскрыто понятие экономического риска; описаны структурные характеристики риска; проанализированы критерии классификации экономического риска, проводимой в соответствии с содержанием его структурных характеристик; даны разработанные классификация методов управления рисками, а также процедуры отбора метода управления риском и построения решения по управлению экономическим риском.

В целом содержание глав разд. III учебника содержит описание методов решения многокритериальных задач.

Раздел IV учебника посвящен рассмотрению задач принятия решений в условиях неопределенности.

Так, в *гл. 14* рассматриваются вопросы принятия решений в условиях вероятностной неопределенности. В ней представлена классификация задач принятия решений в условиях неопределенности, дано описание математической модели неопределенных факторов, раскрыт смысл субъективной и объективной вероятности, представлено описание функции полезности и дан анализ возможных решений при вероятностной неопределенности и в условиях риска. Самостоятельно рассматривается вопрос многокритериального выбора в условиях неопределенности.

Глава 15 посвящена вопросам принятия решений в условиях риска. При этом в ней раскрываются вопросы выбора в условиях риска; рассматривается понятие стохастического доминирования. В отношении мер риска описываются вопросы их классификации и выбора в качестве критериев. С позиций рассматриваемых теоретических понятий в главе освещается ряд вопросов теории портфеля ценных бумаг.

Глава 16 учебника посвящена вопросам принятия решений в условиях полной неопределенности. В ней дана постановка соответствующей задачи принятия решений и очень подробно рассмотрены принципы оптимальности или критерии выбора решений в условиях полной неопределенности – принципы оптимальности Вальда, максимакса и лексикографического максимакса, принципы оптимальности Гурвича, Сэвиджа, Бернулли — Лапласа, Бейеса — Лапласа. Рассмотрена и исследована проблема устойчивости принимаемых решений.

В целом содержание глав разд. IV учебника содержит описание задач принятия решений в условиях неопределенности.

Раздел V учебника связан с теоретическими и практическими проблемами информационной поддержки принятия решений.

Так, *гл. 17* учебника раскрывает роль информации как ключевого фактора принятия решений. В ней подробно рассматриваются такие вопросы, как свойства информации, ее источники и методы анализа. Особое место занимают вопросы интернет-аналитики и профессиональных источников информации, играющие существенную роль при создании систем поддержки принятия решений. Рассмотрение проблем неопределенности в информации и рисков является существенным, так как именно эти факторы влияют на возможности применения различных экономико-математических методов и инструментальных средств в задачах принятия решений.

Главы 18 и 19 посвящены теоретическим основам применения новых, современных методов анализа и исследования экономических данных, обусловленных возможностями получения больших массивов данных.

Так, в *гл. 18* дано описание нечетко-множественных методов анализа экономических данных и исследуются возможности их использования для анализа экономической информации. В ней показано, что существует подход к моделированию неопределенности на основе теории нечетких множеств; что принцип расширения, введенный Л. Заде, позволяет перенести математические операции с четких множеств на нечеткие; что этот принцип может использоваться при моделировании различных экономических задач. Проиллюстрировано, что в отличие от классической теории нечетких множеств существуют различные альтернативные варианты представления таких операций, как дополнение, пересечение, объединение, что лингвистические переменные используются при формировании нечетких правил и являются основой нечетких экспертных систем. В главе раскрыты возможности использования нечетких регрессионных моделей в эконометрическом анализе.

Глава 19 данного раздела содержит обоснование возможностей использования методов интеллектуального анализа данных в экономике, описание искусственных нейронных сетей как современных вычислительных структур и возможностей их применения для проведения экспертного анализа. Глава содержит описание нейросетевых моделей кластеризации данных, раскрывает вопросы применения генетических алгоритмов для решения задач нечеткой кластеризации в неевклидовых метриках.

В целом содержание глав разд. V учебника содержит описание важнейших современных проблем информационной поддержки принятия решений.

К особенностям изложения материала данного учебника относится следующее.

Во-первых, содержание учебника в первую очередь посвящено рассмотрению наиболее сложных современных теоретических проблем принятия решений.

Во-вторых, логика изложения материала определила укрупненную структуру двухтомного учебника.

В-третьих, изложение материала предполагает выделение таких рубрик, как «Определение», «Обратите внимание», «Важно» и т.д.

В-четвертых, в каждом разделе выделены вопросы, о которых студент должен иметь представление в результате изучения материала соответствующей главы.

В-пятых, каждый раздел работы содержит ключевые слова. Каждая глава заканчивается резюме (выводами), а также вопросами и заданиями для самоконтроля.

В-шестых, изложение проблем в учебнике идет с учетом не только российского, но и зарубежного опыта в этой области.

В-седьмых, авторы учебника имеют свои научные публикации по тематике учебника, поэтому он носит авторский характер.

В результате изучения данного курса студент должен:

знать

• методы принятия решений на основе анализа математических моделей предпочтений;

• примеры задач принятия решений в условиях неопределенности; математические модели неопределенных факторов и числовые характеристики риска;

• компьютерные системы поддержки принятия решений и примеры использования информационных систем и технологий;

уметь

• проводить формирование набора альтернатив и критериев принятия решений с учетом их важности;

• формулировать постановки многокритериальных задач принятия решений;

• оценивать возможные (альтернативные) решения с использованием методов нечеткой логики;

владеть

• методами применения итеративных методов при формировании управленческих решений;

• навыками применения методов СППР в экономике, менеджменте, бизнес-информатике и государственном и муниципальном управлении;

• способами применения полученных теоретических знаний на практике.

Для студентов, аспирантов и преподавателей экономических вузов, практических работников и специалистов, изучающих теоретические, концептуальные и практические вопросы принятия управленческих решений, а также создания и функционирования систем поддержки принятия решений.

Раздел III

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

В результате изучения данного раздела студент должен:

знать

• психологические факторы в процессе принятия решений;

• возможность сведения задачи со многими факторами к одному главному фактору;

• целесообразность использовать минимаксные и байесовские критерии;

• принятие решений на основе экспертных методов;

• критерии, основанные на линейной свертке;

• эвристические методы решения многокритериальных задач;

• понятие идеальной точкой критериального пространства;

• задачу минимизации расстояния от оценки выбираемого решения до идеальной точки или до целевого множества;

• три аксиомы для корректного задания метрики;

• главное отличие целевого программирования от линейного программирования;

• процедуру последовательной кластеризации элементов;

• основное преимущество эвристических методов;

• понятие риск как самостоятельный объект управления;

• методы управления рисками;

уметь

• находить оптимальные решения из имеющегося множества альтернатив на основе минимаксных и байесовских критериев;

• строить оптимальное решение на основе «правила большинства»;

• проверять наличие согласованности мнений у комитета экспертов;

• применять критерии, основанные на линейной свертке частных критериев;

• формулировать постановку задачи в терминах целевого программирования;

• подбирать подходящую метрику в критериальном пространстве и весовые коэффициенты для установления системы приоритетов целей;

• сводить задачу целевого программирования к задаче линейного программирования, если это допустимо;

• строить векторы приоритетов по матрицам парных сравнений;

• находить собственные числа матриц парных сравнений;

• оценивать практический смысл результатов, полученных методами целевого программирования и анализа иерархий при принятии решений;

• оценивать однородность критериев;

• учитывать информацию о количественной важности критериев при сужении множества Парето — Эджворта;

• в зависимости от конкретных значений классификационных признаков выбирать соответствующий метод управления рисками;

владеть

• навыками применения байесовских и минимаксных критериев принятия решений;

• способами построения бинарных отношений на основе имеющихся частных критериев;

• методами анализа данных экспертного опроса и построения заключений на его основе;

• методами построения итогового критерия принятия решений с помощью линейной свертки имеющихся частных критериев;

- навыками поиска минимума удаленности векторной оценки варианта от целевого множества методами целевого программирования;
- способами построения иерархии критериев и целей и нахождения соответствующих параметров при анализе практических проблем;
- методами применения собственных чисел и собственных векторов матриц парных сравнений в расчетах реальных задач с многими критериями методом анализа иерархий;
- навыками интерпретации полученных эвристическими методами результатов расчета и определения итоговых приоритетов вариантов решений в многокритериальных задачах оптимизации сложных систем;
- методами логического анализа при решении практических задач оценки важности критериев;
- методами геометрического преобразования конуса предпочтения и линейного преобразования критериев с помощью оценок их важности в практических задачах принятия решений;
- способами определения конкретных значений классификационных признаков, используемых при выборе метода управления;
- навыками определения допустимых преобразований для различных типов шкал измерения;
- навыками выбора способов моделирования проблемной ситуации;
- методами анализа задач принятия решений при многих критериях при разработке конкретных экономических и организационно-управленческих моделей;
- методами формирования и описания задач принятия решений;
- способами формирования и описания математической модели задачи принятия решений в конкретной ситуации;
- навыками определения особенностей задач принятия решений, влияющих на выбор метода их решения;
- способами построения функции полезности и риска для задач принятия решений в условиях вероятностной неопределенности;
- навыками построения кривых предпочтения для аддитивных функций полезности;
- методами отсеивания на практике доминируемых по Парето решений и альтернатив из дискретного набора;
- навыками применения угла предпочтения и конуса предпочтения в реальных задачах с двумя критериями;
- способами отыскания участков границы области решений, которые составляют множество Парето — Эджворта в практических задачах;
- навыками использования численных алгоритмов построения, аппроксимации и сужения множества Парето — Эджворта и фронта Парето для принятия решений в многокритериальных задачах.

Ключевые слова

Метод главного критерия; функция потерь; минимаксное решение; байесовский риск; отношение порядка; правило большинства; ранжировка; метод SMART; обобщенные средние; скаляризация; интегральный критерий; линейная свертка; нечеткие ограничения; рандомизация; эвристические методы; программирование; минимизация; матрицы парных сравнений альтернатив; собственные числа и собственные векторы; критерии оценки и векторы приоритетов; важность критериев, свертка критериев; множество Парето; риск; опасность; уязвимость.

Глава 10
ОСОБЕННОСТИ ПРИНЯТИЙ РЕШЕНИЙ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

10.1. Классификация методов решения при многих критериях

Существует обширное множество различных методов, направленных на решение многокритериальных задач. Подобные методы исторически возникли и получили свое развитие в рамках самых различных предметных областей и направлений, математической кибернетики, прикладной математики, теории управления, социологии, психологии и целого ряда других научных дисциплин. Выбор метода решения, очевидно, зависит от целей, преследуемых в конкретной ситуации принятия решения, а также от объема и характера информации, которая доступна ЛПР.

Приступая к решению задачи, ЛПР должен прежде всего определить:

• какие именно частные критерии следует включить в рассмотрение, по крайней мере, на первоначальном этапе, и с помощью которых будет осуществлен выбор (или построение) решения;

• с помощью каких шкал значения этих критериев могут быть оценены или измерены для каждого из возможных решений — носят ли они числовой или нечисловой характер, каковы те методы, которые были использованы при их измерении, вычислении построении их оценок и т.п.;

• доступна ли эта информация полностью или лишь частично, носит ли она вполне определенный (достоверный) или стохастический характер;

• в случае стохастической природы имеющейся информации каковы те допущения, которые могут быть сделаны относительно законов распределения значений частных критериев и (или) параметров этих законов;

• какова структура взаимосвязей внутри множества частных критериев — имеет ли место корреляционная зависимость значений одних частных критериев от значений других;

• допустима ли «взаимная компенсация», когда для каждого из возможных решений низкий уровень по одним частным критериям может быть компенсирован высоким уровнем по другим.

Следует также сформировать (с учетом всех возможных ограничений) само множество возможных решений, среди которых будет осуществляться поиск оптимального. Оно может быть как конечным, так и бесконечным, носить дискретный или непрерывный характер и т.п.

Помимо этого необходимо сформулировать и по мере возможности формализовать цель решения задачи. Этот важный этап, в частности, может включать построение целевой функции, оптимизация которой позволит выбрать наилучшее решение. Здесь же ЛПР следует определить, возможна ли численная оценка каждого из имеющихся допустимых решений или же доступная информация носит нечисловой характер.

После ответа на эти основные вопросы можно определить и круг возможных методов решения поставленной задачи о принятии решения на основе имеющихся критериев.

Обратите внимание!

Выбору метода принятия решений предшествует большая подготовительная работа, связанная с уточнением целого ряда вопросов, влияющих на этот выбор.

С учетом всех соображений, приведенных выше, классификация известных из литературы подходов и методов решения рассматриваемых задач может быть осуществлена различными способами.

Прежде всего, *по характеру исходных данных* среди методов могут быть выделены те, которые ориентированы исключительно на числовую информацию об альтернативных вариантах и о частных критериях, и те, которые предполагают или допускают, что исходные данные могут носить нечисловой характер[1]. К числу последних следует отнести, в частности, ряд методов, объединяемых названием «методы неметрического шкалирования», методы, основанные на теории бинарных отношений, а также многие методы, использующие экспертные оценки[2].

В свою очередь, методы математического программирования и исследования операций позволяют находить решение при числовых критериях, характеризующих сравниваемые альтернативы.

В зависимости от *полноты и степени определенности информации*, которой располагает ЛПР, методы принятия решений также могут подразделяться на применяемые в условиях определенности и применяемые в условиях неопределенности. Для принятия решения в условиях неопределенности (полной или частичной) применяются минимаксные критерии, а также методы, в основе которых лежат стохастические модели, описывающие недостаток информации, которой располагает ЛПР. Примером последних служат байесовские критерии, реализующие минимизацию байесовского риска.

Следует отметить также и классификацию методов с точки зрения *возможности и допустимости свертки* множества частных критериев в один общий (комплексный, интегральный), при помощи которого и осуществляется решение по выбору наилучшей альтернативы. Применение методов, включающих свертку показателей, допустимо в тех случаях, когда по смыслу и содержанию задачи низкий уровень той или иной из конкурирующих альтернатив с точки зрения ее предпочтения по одним частным критериям может быть компенсирован за счет высокого уровня ее предпочтения по другим частным критериям. При обоснованности такой свертки (скаляризации многомерного критерия) возникает возможность применять широкий спектр методов, в которых решение задачи зачастую сводится к выбору или оценке весовых коэффициентов, указывающих на сравнительную

---

[1] *Ярыгин А. Н., Колачева Н. В., Палфёрова С. Ш.* Методы нахождения оптимального решения экономических задач многокритериальной оптимизации // Вектор науки. ТГУ. 2013. № 1 (23). С. 388–393.

[2] См., например: *Орлов А. И.* Эконометрика : учебник для вузов. М. : Экзамен, 2003. 576 с.

важность (значимость) отдельных частных критериев, присутствующих в задаче. Определение весов при свертке критериев, в частности, при линейной свертке, также может в той или иной мере базироваться на методах анализа экспертных оценок.

Важную роль как в самом процессе выработки решения на основе многих критериев, так и при оценке оптимальности достигнутого результата играет психологическая составляющая. ЛПР, выполняя последовательно все этапы принятия решения, не может не привносить в процесс многое из того, что свойственно ему как индивиду, с присущими ему чертами поведения и восприятия. Сам процесс моделирования ситуации, в которой принимается решение, очевидно, приводит к ее упрощению, где часть воздействующих факторов (частных критериев) отбрасывается и не принимается во внимание. Степень такого упрощения, очевидно, зависит от психологических особенностей ЛПР. Различные последствия своих решений люди также оценивают субъективно, приписывая им некую ценность или полезность, что отражает их личные взгляды и предпочтения. Субъективная полезность альтернатив может играть важную роль в принятии решений, поскольку определяет окончательный выбор.

В связи с этим в теории принятия решений выделяют *дескриптивную* (описательную) и *прескриптивную* (предписывающую) составляющие[1].

Дескриптивная составляющая описывает реальное поведение и мышление людей в процессе принятия решений и называется психологической теорией принятия решений.

Прескриптивная составляющая, в свою очередь, предписывает, как людям следует принимать решения, ее также называют *нормативной теорией принятия решений*.

Нормативная теория принятия решений базируется на двух основных концепциях: *максимизации полезности* и *ограниченной рациональности*.

Предполагается, что у каждого человека имеется своя собственная *функция полезности*, отражающая его индивидуальную систему предпочтений. Эта функция может быть формализована с помощью аналитического выражения или быть скрытой внутри его предпочтений. Оценивая каждое решение, ЛПР явно или неявно сопоставляет ему некоторое значение своей функции полезности, указывающее на степень предпочтительности данного решения по сравнению с остальными. При этом оптимальным будет считаться решение, обладающее максимальной полезностью. Концепция максимизации полезности нашла свое отражение в целом ряде математических моделей и методов принятия решений, часть которых описывается ниже.

Концепция ограниченной рациональности базируется на соображениях, связанных с реальными условиями, в которых ЛПР вынужден принимать решения. В реальной действительности число сравниваемых альтернативных решений может быть искусственно ограничено из соображений экономии средств, времени и других ресурсов. Неопределенность внутренних и внешних факторов, влияющих на результат, приводит также к ограничениям на множество учитываемых в задаче частных критериев. В результате то решение, которое будет принято ЛПР, вовсе не обязательно окажется

---

[1] *Кулагин О. А.* Принятие решений в организациях. СПб. : Сентябрь, 2001. 139 с.

оптимальным: оно будет представлять лишь некий рациональный выбор из тех альтернатив, которые охвачены упрощенной моделью.

Обратите внимание!

Методы принятия решений на основе многих критериев, которые рассматриваются далее, по-своему отражают психологические аспекты и в явной или в неявной форме базируются на концепциях максимизации полезности и ограниченной рациональности. Субъективная составляющая, обусловленная психологическими свойствами, присутствует как в самих исходных данных (сравнительные суждения, нечеткие и нечисловые оценки и т.п.), так и при выборе элементов модели (аналитический вид целевой функции, функции полезности, субъективные вероятности и т.д.).

10.2. Примеры методов принятия решений при числовых исходных данных

Метод главного критерия. Реализуя вышеназванную концепцию ограниченной рациональности, ЛПР может стремиться сократить как число возможных альтернативных решений, так и число учитываемых частных критериев. Очевидной рациональной основой для сокращения альтернатив является исключение доминируемых по Парето решений. В наиболее простом случае, когда после выполнения этой процедуры множество Парето — Эджворта недоминируемых альтернатив $P_f(X)$[1] содержит всего один элемент, выбор решения очевиден. Столь же несложно решается задача, когда среди имеющихся частных критериев $f_1(x)$, ..., $f_m(x)$ имеется один, значимость (важность) которого с точки зрения ЛПР существенным образом превалирует над значимостью всех остальных. В этом случае данный критерий может рассматриваться как «главный» и выбор альтернативы будет выполняться в соответствии с ним, без учета остальных критериев. Как будет показано далее, многокритериальная задача принятия решения может быть сведена к одному, главному, критерию и в ряде других случаев, однако, построение такого критерия потребует применения своих специально предназначенных для этой цели методов.

Важно!

Возможность и оправданность отождествления итогового (главного) критерия с одним из частных критериев определяется ЛПР и требует с его стороны глубокого понимания сути задачи и ее предметной области, а также возможных последствий игнорирования прочих частных критериев.

После отбрасывания доминируемых альтернатив выбор должен производиться лишь из числа тех оставшихся альтернатив $x \in X$, которые составляют множество Парето — Эджворта $P_f(X)$. В ряде случаев, следуя концепции максимизации полезности, ЛПР может найти основания, чтобы упорядочить тем или иным способом множество всех частных критериев. Если такое упорядочение достигнуто, то далее выбор оптимального решения достигается путем лексикографического сравнения альтернатив $x \in P_f(X)$.

[1] Здесь и далее используются те же обозначения, что и ранее в разд. I.

Таким образом, если множество частных критериев $f_1(x), ..., f_m(x)$ упорядочено по степени их важности (по степени их влияния на принятие решения), так что

$$f_1 \succ f_2 \succ ... \succ f_m,$$

где символ «$\succ$» обозначает имеющееся на множестве критериев отношение порядка, то вначале следует выбрать ту альтернативу x, на которой достигается $\max f_1(x)$ по всем $x \in P_f(X)$. Если такая альтернатива — единственная, то решение принимается в ее пользу, и тем самым задача решена. Если же их несколько, то среди них решение принимается в пользу той альтернативы, на которой достигается максимум следующего по степени важности частного критерия, т.е. $\max f_2(x)$. И далее, при необходимости, этот процесс продолжается до тех пор, пока окончательный выбор альтернативы не будет однозначным, либо пока не будут исчерпаны все m частных критериев.

Обоснованность такого правила принятия решения очевидна: выбирается та альтернатива, которая, во-первых, является Парето-оптимальной и, во-вторых, превосходит остальные альтернативы по наиболее важным частным критериям.

Остается выяснить, каким образом может быть построено требуемое в данном методе упорядочение множества частных критериев $f_1(x), ..., f_m(x)$. В частности, это может быть достигнуто одним из обсуждаемых далее эвристических методов, базирующихся на использовании экспертных оценок, таких как анализ ранжировок, парных сравнений и т.п.

Байесовские и минимаксные критерии принятия решения в условиях неопределенности. Степень неопределенности ситуации, в которой принимается решение, характеризуется объемом и характером информации о предполагаемой полезности тех или иных возможных альтернативных решений. Хорошей иллюстрацией здесь может служить модель описания принятия решения в виде «игры с природой», когда значение функции полезности (или используемой в равной мере ее противоположной величины, называемой *функцией потерь*) заранее неизвестно и зависит от тех или иных параметров состояния внешней среды[1].

Дальнейшее рассуждение будем вести в терминах функции потерь L, понимаемой как «полезность со знаком минус», так что ее положительные значения означают, что решение имеет отрицательную полезность, и напротив, если $L < 0$, то решение обладает положительной полезностью.

Рассмотрим случай, когда множество S возможных состояний внешней среды, влияющих на значение функции потерь, является конечным: $S = \{s_1, ..., s_k\}$. Как и ранее, через $X = \{x_1, ..., x_n\}$ будем обозначать конечное множество допустимых альтернативных решений. Функция потерь будет определена, если ее значение задано для каждого элемента множества $S \times X$ — прямого произведения множеств возможных состояний внешней среды и возможных решений, принимаемых ЛПР

$$L = L(s, x), \forall(s, x) \in S \times X.$$

[1] *Райфа Г., Шлайфер Р.* Прикладная теория статистических решений. М. : Статистика, 1977. 360 с.

Каждое допустимое решение $x \in X$ может быть охарактеризовано величиной $L^*(x)$ максимального значения функции потерь в случае, если ЛПР сделал выбор в пользу этого решения

$$L^*(x) = \max\{L(s_1, x), ..., L(s_{k,} x)\}.$$

Отсутствие дополнительных ведений о том, насколько правдоподобно каждое из возможных состояний внешней среды, означает, что ЛПР вынужден принимать решение в условиях полной неопределенности. Единственной, по сути, информацией, которой он располагает, являются значения максимальных возможных потерь $L^*(x)$ для каждого из конкурирующих решений $x \in X$. Вполне естественным в этих условиях будет выглядеть критерий принятия решения, согласно которому выбор следует сделать в пользу того решения x_0 (или тех решений, если их несколько), для которого выполняется

$$L^*(x_0) = \min L^*(x) = \min \max\{L(s_1, x), ..., L(s_{k,} x)\},$$

где минимум берется по всем $x \in X$. Таким образом, выбирается то решение, которое минимизирует максимальные потери по всевозможным состояниям внешней среды. Вполне очевиден смысл названия такого рода критериев принятия решений, которые называются «*минимаксные*»[1].

Пример минимаксных критериев. Пусть требуется заранее заказать некоторый объем расходуемого ресурса (например, определить размер заказа муки для пиццерии или тираж буклетов для стенда на будущей выставке, тогда как спрос на этот ресурс (т.е. число посетителей пиццерии или стенда) заранее неизвестен. Если заказанный объем окажется недостаточен, то заказ кого-то из потенциальных клиентов не будет выполнен и фирма (или ЛПР) понесет убыток. Если же, напротив, заказ слишком велик, то помимо зря потраченных средств на приобретение и доставку данного объема фирма понесет убыток, связанный с утилизацией или обратной транспортировкой, или с хранением оставшегося невостребованным ресурса.

Для наглядности и простоты дальнейшего изложения предположим, что изначально допустимыми решениями являются возможности объема заказа: «малого» (x_1), «среднего» (x_2) и «большого» (x_3).

В свою очередь возможные уровни спроса (посещаемости стенда или пиццерии) пусть будет можно подразделить на «низкий» (s_1), «средний» (s_2) и «высокий» (s_3).

Очевидно, каждое из сочетаний значений внешнего фактора $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ и принимаемого возможного решения из множества $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ приводит к определенному значению функции потерь L. Мы не будем уточнять, каким образом можно практически оценить функцию потерь при каждом из возможных сочетаний значений x и s, полагая, что этого можно достичь, примерно оценив расходы на производство и доставку заданного объема ресурса, а также прибыльность продаж (или эффективность распространения буклетов), исходя из имеющегося прошлого опыта. Пусть, например, функция потерь L имеет вид, задаваемый табл. 10.1.

---

[1] *Нейман Дж. фон, Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М. : Наука, 1970. 708 с.

Таблица 10.1

Исходные данные для примера нахождения решения по минимаксным критериям

Уровни спроса	Объем заказа		
	x_1	x_2	x_3
s_1	0	25	30
s_2	15	5	10
s_3	20	15	5

Заметим, что среди данных трех решений отсутствуют доминируемые, так что все три возможные решения являются Парето-оптимальными.

Руководствуясь минимаксным критерием, определим для каждого из возможных решений x_1, x_2, x_3 наихудший возможный сценарий, при котором потери будут максимальны. В итоге из последней таблицы находим

$$L^*(x_1) = 20; \quad L^*(x_2) = 25; \quad L^*(x_3) = 30.$$

Легко видеть, что оптимальным является решение x_1, при котором максимум потерь равен 20.

Минимаксными критериями разумно пользоваться, когда в распоряжении ЛПР информации мало или когда решается «однократная» задача — например, фирма впервые и, возможно, единственный раз собирается принять участие в малоизвестной выставке. В ряде других ситуаций принятия решения неопределенность возможного состояния внешней среды может быть описана при помощи тех или иных стохастических моделей[1].

Пусть на множестве S возможных состояний внешней среды задано распределение вероятностей $P(s)$. При этом функция потерь $L = L(s, x)$ становится случайной величиной со своим распределением вероятности, зависящим от решения $x \in X$ как от параметра.

Во многих практических задачах, когда принятие решения осуществляется в повторяющихся однотипных условиях, на первый план выходят критерии, основанные на средних значениях. Иначе говоря, если при однократном принятии решения в условиях неопределенности ЛПР скорее всего будет стремиться обезопасить себя от экстремально больших значений ущерба, и это оправдывает применение минимаксных критериев, то в данном случае, когда решение необходимо принимать многократно, важнее минимизировать среднее значение потерь.

Определение

> Математическое ожидание $E(L(s, x))$ функции потерь, выражающее средний ущерб от принятия решения $x \in X$, называется *риском*.

Риск от принятия решения $x \in X$ при заданном распределении $P(s)$ на множестве S будем обозначать как $R(P, x)$

$$R(P, x) = E(L(s, x)).$$

Определение

> *Байесовским риском* $R^*(P)$ для заданного распределения $P(s)$ называется точная нижняя грань рисков $R(P, x)$ по всем возможным решениям $x \in X$.

[1] *Зельнер А.* Байесовские методы в эконометрике. М. : Статистика, 1980. 438 с.

Таким образом, исходя из последнего определения: $R^*(P) = \inf R(P, x)$, где inf обозначает точную нижнюю грань, взятую по множеству всех допустимых решений.

Определение

> Решение $x^* \in X$, риск от принятия которого равен байесовскому риску, называют *байесовским решением* для заданного распределения $P(s)$[1].

Итак, выбор байесовского решения в качестве оптимального является обоснованным критерием в задачах, допускающих описание неопределенности внешних условий при помощи вероятностной модели.

Пример построения байесовского решения. Пусть некая фирма занимается продажей мороженого на стадионе во время важных спортивных мероприятий. Известно, что реализация единицы продукции приносит ей доход в размере a_1 (руб.), а каждая из оставшихся нереализованными единиц приносит убыток в размере a_2 (руб.). Предполагается, что спрос s на мороженое можно описать как случайную величину с известной функцией распределения $F_s(s)$, которая является абсолютно непрерывной.

Требуется принять решение о том, сколько единиц продукции x ($x \geqslant 0$) следует заранее заказать с тем, чтобы средняя величина ожидаемого дохода была максимальной.

Данную задачу будем решать не в терминах функции потерь $L(s, x)$, а в терминах противоположной к ней функции полезности

$$U(s, x) = -L(s, x),$$

которая в данной задаче имеет смысл дохода фирмы, когда было заказано x единиц, а спрос составляет s единиц продукции.

С учетом имеющихся исходных данных непосредственно находим, что при $s \geqslant x$

$$U(s, x) = a_1 \cdot x,$$

поскольку весь заказанный объем будет реализован, так как он не превышает спрос. Если же спрос меньше, чем объем заказа, т.е. $s < x$, спрос будет удовлетворен, но часть заказанной продукции останется нереализованной. В силу этого при $s < x$

$$U(s, x) = a_1 \cdot s - a_2(x - s) = (a_1 + a_2) \cdot s - a_2 \cdot x.$$

Далее с помощью функции распределения случайного спроса $F_s(s)$ найдем функцию распределения функции полезности $F_U(u)$.

Прежде всего, отметим, что $F_U(u)$ не является всюду непрерывной, так как имеется значение $U = a_1 \cdot x$, которое наблюдается с положительной вероятностью

$$\Pr(U = a_1 \cdot x) = \Pr(s \geqslant x) = 1 - F_s(s).$$

---

[1] *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения. М. : Мир, 1974. 491 с.

Для всех остальных значений u имеем

$$F_U(u) = \Pr(U(s,x) < u) = \begin{cases} 0, \ u < -a_2 \cdot x, \\ \Pr\left(s < \dfrac{u + a_2 x}{a_1 + a_2}\right) = F_s\left(\dfrac{u + a_2 x}{a_1 + a_2}\right), -a_2 \cdot x \le u < a_1 \cdot x, \\ 1, \ u > a_1 \cdot x. \end{cases}$$

Таким образом, для всех u, принадлежащих интервалу $(-a_2 \cdot x, a_1 \cdot x)$, распределение случайного дохода $U(s, x)$ будет иметь плотность

$$(a_1 + a_2)^{-1} f_s\left(\frac{u + a_2 x}{a_1 + a_2}\right).$$

Это позволяет представить математическое ожидание $E(U(s, x))$ в виде

$$E(U(s, x)) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{-a_2 x}^{a_1 x} u f_s\left(\frac{u + a_2 x}{a_1 + a_2}\right) du + a_1 x (1 - F_s(x)).$$

После замены переменной в последнем интеграле найдем производную от выражения $E(U(s, x))$ по x

$$[E(U(s, x))]'_x = (a_1 + a_2) \cdot x \cdot f_s(x) - x \cdot a_2 f_s(x) - a_2 F_s(x) +$$
$$+ a_1 (1 - F_s(x)) - a_1 \cdot x \cdot f_s(x).$$

Приравняв эту производную к нулю и исследовав найденную стационарную точку на экстремум, находим в итоге, что ожидаемое значение дохода будет максимальным, если объем предварительного заказа x выбран равным значению x^*, которое удовлетворяет условию

$$F(x^*) = \frac{a_1}{a_1 + a_2}.$$

Таким образом, в данном примере найдено оптимальное решение, которое максимизирует функцию полезности (доход), т.е. является байесовским[1].

10.3. Принятие решений при нечетких и нечисловых исходных данных; основы экспертных методов принятия решений

Анализ бинарных отношений. Рассмотрим один из возможных подходов к принятию решения в случае, когда частные критерии $f_1(x),..., f_m(x)$ носят нечисловой характер.

Пусть каждый частный критерий задает на множестве альтернатив бинарное отношение, а именно отношение порядка: строгого порядка — в простейшем случае (транзитивное, антирефлексивное), либо нестрогого порядка (транзитивное, антисимметричное, рефлексивное), либо квазипорядка (рефлексивное, транзитивное). На практике это означает, что по каждому из критериев либо все, либо некоторые из сравниваемых альтернативных решений могут быть упорядочены по степени их предпочтительности.

---

[1] Данный пример был предложен в качестве одного из упражнений для самостоятельного решения в книге: *Де Гроот М.* Указ. соч.

Каждое бинарное отношение **R** может быть представлено матрицей (будем обозначать ее той же буквой). Элементы $r_{i,j}$ матрицы определяются согласно следующему правилу

$$r_{i,j} = 1 \Leftrightarrow (x_i, x_j) \in \mathbf{R};\ \ r_{i,j} = 0 \Leftrightarrow (x_i, x_j) \notin \mathbf{R},$$

где $i = 1, ..., n$; $j = 1, ..., n$; n — общее число подлежащих сравнению объектов (в данном контексте — возможных альтернатив). Запись $(x_i, x_j) \in \mathbf{R}$ обозначает, что объект x_i находится в отношении **R** с объектом x_j. Соответственно, $(x_i, x_j) \notin \mathbf{R}$ означает, что x_i с x_j в отношении **R** не находится. В терминах элементов матрицы **R** указанные выше свойства бинарных отношений можно выразить следующим образом[1]. Бинарное отношение **R** является:

- рефлексивным, если $r_{i,i} = 1$ для всех $i = 1, ..., n$;
- антирефлексивным, если $r_{i,i} = 0$ для всех $i = 1, ..., n$;
- симметричным, если $r_{i,j} = r_{j,i}$ для всех $i, j = 1, ..., n$;
- антисимметричным, если при $i \neq j$ $r_{i,j} r_{j,i} = 0$ для всех $i, j = 1, ..., n$;
- транзитивным, если $r_{i,j} = r_{j,k} = 1 \Rightarrow r_{i,k} = 1$ для всех $i, j, k = 1, ..., n$.

Последнее условие также можно записать как $r_{i,j} r_{j,k} \leqslant r_{i,k}$.

Степень «похожести» двух бинарных отношений, очевидно, тем выше, чем больше число соответствующих элементов в их матрицах одинаково. Вполне естественно в качестве меры близости бинарных отношений $\mathbf{R}^{(X)}$ и $\mathbf{R}^{(Y)}$ принять величину, равную сумме абсолютных величин разностей соответствующих элементов этих матриц

$$d(\mathbf{R}^{(X)}, \mathbf{R}^{(Y)}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |r_{i,j}^{(X)} - r_{i,j}^{(X)}|. \tag{10.1}$$

Определение

Расстоянием между бинарными отношениями $\mathbf{R}^{(X)}$ и $\mathbf{R}^{(Y)}$ называют величину $d(\mathbf{R}^{(X)}, \mathbf{R}^{(Y)})$, определяемую согласно формуле (10.1)[2].

Можно заметить, что $d(\mathbf{R}^{(X)}, \mathbf{R}^{(Y)})$ обладает следующими свойствами:

1) $d(\mathbf{R}^{(X)}, \mathbf{R}^{(Y)}) \geqslant 0$, причем $d(\mathbf{R}^{(X)}, \mathbf{R}^{(Y)}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{R}^{(X)} = \mathbf{R}^{(Y)}$;

2) $d(\mathbf{R}^{(X)}, \mathbf{R}^{(Y)}) = d(\mathbf{R}^{(Y)}, \mathbf{R}^{(X)})$;

3) $d(\mathbf{R}^{(X)}, \mathbf{R}^{(Y)}) \leqslant d(\mathbf{R}^{(X)}, \mathbf{R}^{(Z)}) + d(\mathbf{R}^{(Z)}, \mathbf{R}^{(Y)})$ для любых трех бинарных отношений $\mathbf{R}^{(X)}, \mathbf{R}^{(Y)}, \mathbf{R}^{(Z)}$.

Последнее свойство следует из свойств абсолютных величин и является обобщением известного «неравенства треугольника».

Указанные три свойства являются основными аксиомами, которым должно удовлетворять расстояние, определяемое для элементов любого пространства[3]. Тем самым оправдано использование термина *расстояние между бинарными отношениями* применительно к (10.1).

Если число объектов достаточно велико, расстояние между бинарными отношениями $\mathbf{R}^{(X)}$ и $\mathbf{R}^{(Y)}$ проще находить с помощью таблицы сопряженно-

---

[1] *Шрейдер Ю. А.* Равенство, сходство, порядок. М. : Наука, 1971. 256 с.

[2] Расстояние между бинарными отношениями, определяемое формулой (10.1), принято называть «расстоянием Кемени».

[3] Множество элементов произвольной природы с определенной для них функцией, удовлетворяющей свойствам 1—3, называют метрическим пространством, а саму эту функцию — расстоянием или метрикой.

сти $\mathbf{N} = \{n_{i,j}\}$, где элемент $n_{i,j}$ равен числу объектов, которые в бинарном отношении $\mathbf{R}^{(X)}$ относятся к i-й градации, а в $\mathbf{R}^{(Y)}$ — к j-й градации ($i = 1, ..., p$; $j = 1, ..., q$). Размеры p и q матрицы $\mathbf{N}$, как правило, невелики по сравнению с числом объектов (за исключением случая, когда и $\mathbf{R}^{(X)}$, и $\mathbf{R}^{(Y)}$ оба являются отношениями строгого порядка: в этом случае все $n_{i,j} = 1$).

В задачах принятия решений оба бинарных отношения $\mathbf{R}^{(X)}$ и $\mathbf{R}^{(Y)}$ являются, как правило, отношениями квазипорядка, т.е. определяют разбиение данного множества объектов на непересекающиеся классы, причем сами эти классы строго упорядочены. Можно показать, что в этом случае расстояние $d(\mathbf{R}^{(X)}, \mathbf{R}^{(Y)})$, определяемое согласно (10.1), может быть выражено следующим образом с помощью элементов таблицы сопряженности[1]

$$d(\mathbf{R}^{(X)}, \mathbf{R}^{(Y)}) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{i,j}\left(\sum_{u=1}^{i-1}\sum_{v=j}^{q} n_{u,v} + \sum_{u=i}^{p}\sum_{v=1}^{j-1} n_{u,v}\right). \tag{10.2}$$

Для поясняющей формулу (10.2) иллюстрации (которая, разумеется, не заменяет собой строгого доказательства) расположим все объекты в порядке следования градаций бинарного отношения $\mathbf{R}^{(X)}$, начиная с $n_{1,*}$ элементов, относящихся к первой градации, и так далее до $n_{p,*}$, относящихся к последней. Внутри каждой градации бинарного отношения $\mathbf{R}^{(X)}$ упорядочим элементы в соответствии с порядком следования градаций бинарного отношения $\mathbf{R}^{(Y)}$. При этом матрицы двух данных бинарных отношений приобретут вид, который на рис. 10.1 наглядно представлен для случая $p = q = 3$.

$n_{1,1}$	$n_{1,2}$	$n_{1,3}$	$n_{2,1}$	$n_{2,2}$	$n_{2,3}$	$n_{3,1}$	$n_{3,2}$	$n_{3,3}$	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	$n_{1,1}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	$n_{1,2}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	$n_{1,3}$
			1	1	1	1	1	1	$n_{2,1}$
			1	1	1	1	1	1	$n_{2,2}$
			1	1	1	1	1	1	$n_{2,3}$
						1	1	1	$n_{3,1}$
						1	1	1	$n_{3,2}$
						1	1	1	$n_{3,3}$

$\mathbf{R}^{(X)}$

$n_{1,1}$	$n_{1,2}$	$n_{1,3}$	$n_{2,1}$	$n_{2,2}$	$n_{2,3}$	$n_{3,1}$	$n_{3,2}$	$n_{3,3}$	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	$n_{1,1}$
	1	1		1	1		1	1	$n_{1,2}$
		1			1			1	$n_{1,3}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	$n_{2,1}$
	1	1		1	1		1	1	$n_{2,2}$
		1			1			1	$n_{2,3}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	$n_{3,1}$
	1	1		1	1		1	1	$n_{3,2}$
		1			1			1	$n_{3,3}$

$\mathbf{R}^{(Y)}$

Рис. 10.1. **Матрицы отношений квазипорядка $\mathbf{R}^{(X)}$ и $\mathbf{R}^{(Y)}$**

Каждая из клеток матриц, представленных на рис. 10.1, представляет собой прямоугольник, имеющий число строк и столбцов, равное соответствующим элементам $n_{i,j}$. При этом все значения матрицы внутри каждого такого прямоугольника одинаковы (равны 1 или 0), а общее число элементов в таких прямоугольниках равно их «площади», т.е. произведению соответствующих элементов таблицы сопряженности.

Для завершения иллюстрации остается заметить, что $d(\mathbf{R}^{(X)}, \mathbf{R}^{(Y)})$ будет равно сумме «площадей» всех тех прямоугольников, значения элементов в которых различны для матриц $\mathbf{R}^{(X)}$ и $\mathbf{R}^{(Y)}$ (на рис. 10.1 для наглядности эти прямоугольники окрашены в серый цвет в матрице $\mathbf{R}^{(Y)}$). Так, например, для строк, «соответствующих $n_{2,2}$», будем иметь

$$n_{2,2}(n_{1,2} + n_{1,3} + n_{2,1} + n_{3,1}),$$

[1] *Миркин Б. Г.* Проблема группового выбора. М. : Наука, 1974. 256 с.