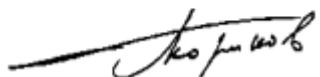


**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»

**Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)**

УТВЕРЖДАЮ  
Зав. кафедрой АСУ, профессор

 А.М. Кориков

**ДИСКРЕТНЫЕ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ**

**Практические занятия**

**Учебно-методическое пособие**

для студентов уровня основной образовательной программы: **магистратура**  
направление подготовки: **01.04.02 - Прикладная математика и информатика**

Разработчик  
доцент кафедры АСУ

В.Г. Резник

2017

**Резник В.Г.**

Дискретные и вероятностные математические модели: методические указания по практическим занятиям. – Томск, ТУСУР, 2017. – 15 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для проведения практических занятий по дисциплине «Дискретные и вероятностные математические модели» уровня основной образовательной программы магистратура направления подготовки: 01.04.02 - «Прикладная математика и информатика».

## Оглавление

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Введение.....</b>   | <b>4</b>  |
| <b>1 Тема 1. Основные принципы математического моделирования.....</b>                                    | <b>5</b>  |
| 1.1 Занятие 1. Подготовка работы на ОС УПК АСУ.....  | 5         |
| 1.1.1 Инструменты рабочей области студента.....  | 5         |
| 1.1.2 Подготовка шаблона отчета по практическим занятиям.....  | 6         |
| 1.2 Требования по оформлению и контролю практических занятий.....  | 6         |
| <b>2 Тема 2. Применение дискретной математики в вероятностных моделях.....</b>                           | <b>7</b>  |
| 2.1 Занятие 2. Вероятностная модель Лапласа.....   | 7         |
| 2.1.1 Требования к результатам моделирования.....  | 7         |
| 2.1.2 Список задач.....  | 7         |
| 2.2 Занятие 3. Решение задач.....  | 8         |
| 2.2.1 Требования к результатам моделирования.....  | 8         |
| 2.2.2 Список задач.....  | 9         |
| 2.3 Занятие 4. Контрольная работа.....   | 9         |
| <b>3 Тема 3. Вероятностные модели.....</b>   | <b>10</b> |
| 3.1 Занятие 5. Вероятностные модели Бернулли и Пуассона.....   | 10        |
| 3.1.1 Требования к результатам моделирования.....  | 10        |
| 3.1.2 Список задач.....  | 10        |
| 3.2 Занятие 6. Решение задач.....  | 11        |
| 3.2.1 Требования к результатам моделирования.....  | 11        |
| 3.2.2 Список задач.....  | 11        |
| 3.3 Занятие 7. Контрольная работа.....   | 11        |
| <b>4 Тема 4. Критерии принятия решений.....</b>  | <b>12</b> |
| 4.1 Занятие 8. Моделирование критериев принятия решений.....   | 12        |
| 4.1.1 Задача об оценке одномерной случайной величины по результатам экспериментов.....                   | 12        |
| 4.1.2 Задача проверки гипотезы об оценке одномерной случайной величины по результатам экспериментов..... | 12        |
| 4.1.3 Задача различения оценок двух одномерных случайных величин по результатам экспериментов.....       | 12        |
| 4.1.4 Список задач.....  | 13        |
| 4.2 Занятие 9. Контрольная работа.....   | 13        |
| <b>Список использованных источников.....</b>   | <b>14</b> |

## Введение

Данное пособие содержит учебно-методический материал для проведения практических занятий по дисциплине «Дискретные и вероятностные математические модели» (ДВММ), уровня основной образовательной программы магистратура направления подготовки 01.04.02 - «Прикладная математика и информатика».

Цель проведения практических занятий:

- закрепление магистрантами теоретических знаний приобретенных на лекционных часах;
- получение практических навыков вероятностного моделирования, связанного с решением дискретных задач в условиях различной степени неопределенностей.

Все практические занятия проводятся в учебных классах кафедры АСУ на базе «Учебного программного комплекса (УПК АСУ)», предполагающего использование стационарных рабочих станций кафедры или персональных компьютеров студентов.

Методическое обеспечение практических занятий, кроме данного пособия, опирается на литературные источники [1-2].

В процессе выполнения практических занятий, студент заполняет **единый отчет**, который является обязательной частью процесса обучения. Содержание и качество материала отчета влияет на общую оценку, выставляемую магистранту на зачете по данной дисциплине.

Распределение и содержание учебного материала практических занятий привязано к соответствующим разделам рабочей программы по данной дисциплине:

- **Тема 1.** Основные принципы математического моделирования.
- **Тема 2.** Применение дискретной математики в вероятностных моделях.
- **Тема 3.** Вероятностные модели.
- **Тема 4.** Критерии принятия решений.

# 1 Тема 1. Основные принципы математического моделирования

Теоретический материал, изложенный в лекционные часы по теме 1, является вводной частью дисциплины ДВММ и содержит множество определений, которые требуют способностей к абстрактному мышлению, анализу и синтезу, соответствующим компетенции ОК-1.

Основная задача практического занятия по данной теме: подготовка личной компьютерной среды, обеспечивающей закрепление знаний последующих тем и подготовку отчета по всем занятиям.

В методическом плане, поставленная задача разбивается на две составляющие:

- подготовка работы на ОС УПК АСУ;
- изучение и осознание требований по оформлению и контролю практических занятий.

## 1.1 Занятие 1. Подготовка работы на ОС УПК АСУ

С целью повышения уровня автоматизации процесса обучения, практические занятия по данной дисциплине проводятся в компьютерной среде ОС УПК АСУ.

Методический материал по использованию этой среды достаточно полно изложен в общем руководстве [2], поэтому далее уточним только два аспекта проводимого занятия:

- изучение инструментов личной рабочей области студента;
- подготовку шаблона отчета по практическим занятиям.

### 1.1.1 Инструменты рабочей области студента

Запустив ОС УПК АСУ, магистрант:

- получает у преподавателя личный архив рабочей области по изучаемой дисциплине;
- подключает этот архив и знакомится со структурой его файловой системы и рабочим столом графического интерфейса.

Освоившись с интерфейсом рабочего стола, магистрант проверяет работу следующих инструментов:

- инструментальную среду Eclipse, в которой запускает стандартный тестовый пример на языке C;
- текстовый редактор LibreOffice, в котором, кроме ввода самого теста, тренируется вводить формулы.

### **1.1.2 Подготовка шаблона отчета по практическим занятиям**

В процессе выполнения всех практических работ, магистрант заполняет единый отчет, в котором излагаются решение задач, а также исходные тексты написанных программ.

Освоив работу с текстовым редактором LibreOffice, магистрант подготавливает шаблон отчета, в котором должны содержаться:

- титульный лист, оглавление и введение;
- разделы по каждому практическому занятию;
- заключение;
- список использованных источников.

#### **Замечание**

За основу шаблона отчета можно взять структуру данного документа.

Выполнив перечисленные работы, магистрант отражает результаты в соответствующем разделе отчета и завершает занятие.

## **1.2 Требования по оформлению и контролю практических занятий**

В процессе выполнения каждой практической работы, магистрант заполняет ее результаты в соответствующем разделе единого отчета.

Хотя технология заполнения отчета достаточно произвольна, она должна соответствовать общим правилам оформления курсовых и проектных работ.

Дополнительно, работа с отчетом должна соответствовать следующим требованиям:

- отчет должен присутствовать на каждом занятии и быть доступен для контроля преподавателем;
- ответственность за сохранение и доступность отчета полностью возлагается на магистранта;
- содержимое и качество отчета учитываются при оценке успеваемости магистранта во время двух контрольных точек.
- наличие отчета во время сдачи отчета является обязательным.

Общие требования по сдаче зачета изложены в документе [1].

## 2 Тема 2. Применение дискретной математики в вероятностных моделях

Практические занятия по теме 2 посвящены закреплению на практике технологии решения задач, известных как задачи «модели Лапласа».

**Модель Лапласа** — технология решения задач, основанная на вычислении вероятностей событий, составляющих подмножество для некоторой полной группы равновероятных событий.

**Основой** решения этих задач является аппарат комбинаторных моделей дискретной математики.

### 2.1 Занятие 2. Вероятностная модель Лапласа

**Цель занятия** — закрепление аппарата теории множеств и комбинаторной математики на примерах решения конкретных задач.

#### 2.1.1 Требования к результатам моделирования

Построить математические модели решения задач при выполнении следующих требований:

- введение и формализация обозначений на основе текстового описания задачи;
- построение математической модели посредством формализация свойств выделенных объектов, которые следует представить набором множеств;
- формирование множества полной группы равновероятных событий;
- формированием множества благоприятных событий;
- вычисление вероятности целевого события посредством использования правил произведения и суммы в комбинаторике.

#### 2.1.2 Список задач

Список задач для построения математических моделей.

##### Задача 1.

В урне находятся 5 шаров, отличающихся только номерами 1, 2, 3, 4, 5.

Вынимается наугад выбранный шар и отмечается его номер.

Вынутый шар возвращается в урну.

После тщательного перемешивания из нее вынимается наугад выбранный шар.

Какова вероятность того, что вынимается не один и тот же шар?

##### Задача 2.

При рождении  $n = 2$  неидентичных близнецов каждый из них с вероятностью 0.52

оказывается мальчиком и с вероятностью 1 —  $a = 0.48$  — девочкой.  
Какова вероятность того, что близнецы оказываются одного пола?

### Задача 3.

Симметричная монета подбрасывается  $n = 10$  раз.  
Известно, что при  $k = 3$ -м подбрасывании появляется герб.  
Какова вероятность при этом условии того, что этот герб первый?

### Задача 4.

Имеются красная, черная и белая урны с черными и белыми шарами.  
В красной урне  $a_1 = 1$  черный и  $a_0 = 2$  белых шара, в черной —  $b_1 = 2$  черных и  $b_0 = 3$  белых, в белой —  $c_1 = 3$  черных и  $c_0 = 4$  белых.  
Из красной урны наугад выбирается шар.  
Если этот шар черный, то следующий шар также наугад выбирается из черной урны.  
Если шар, выбранный из красной урны, белый, то следующий шар наугад выбирается из белой урны.  
Какова вероятность того, что оба выбирающиеся шара имеют одинаковый цвет?

### Задача 5.

По линии связи посылаются сигналы 1,0 с вероятностями  $p_1 = 0.6$ ,  $p_0 = 0.4$ . Если посылается сигнал 1, то с вероятностями  $r_{11} = 0.9$ ,  $r_{10} = 0.1$  принимаются сигналы 1, 0. Если посылается сигнал 0, то с вероятностями  $r_{01} = 0.3$ ,  $r_{00} = 0.7$  принимаются сигналы 1, 0. Какова условная вероятность того, что посылается сигнал 1 при условии, что принимается сигнал 1?

## 2.2 Занятие 3. Решение задач

**Цель занятия** — закрепление навыков компьютерного моделирования технологии реализации «модели Лапласа».

### 2.2.1 Требования к результатам моделирования

Построить математические модели решения задач при выполнении требований «Занятия 2».

Построить компьютерные модели, имитирующие постановочную часть задач, при выполнении требований:

- компьютерная модель реализуется на языке С;
- вероятностные события моделируются стандартным датчиком случайных чисел.



### 2.2.2 Список задач

Список задач для построения математических моделей и программных моделей.

#### Задача 1.

Известно, что успешный результат эксперимента наступает с вероятностью  $p=0,43$ . Построить модель оценки  $\hat{p}$  для вероятности  $p$ . Сколько необходимо провести экспериментов, чтобы с вероятностью  $0.95$  утверждать, что оценка  $\hat{p}$  отличается от  $p$  на величину не превышающую  $p/10$ ?

#### Задача 2.

Построить абстрактное моделирующее устройство, которое бы обеспечивало вероятность успешного события  $p=0.43$ . При построении устройства учесть, общие правила округления чисел *до сотых*.

#### Задача 3.

В урне имеются один белый и два черных шара. Найти вероятность события выборки белого шара. На основе модели урны, черных и белых шаров, построить устройство моделирующее вероятность выбора белого шара с вероятностью  $p=0.33$ .

#### Задача 4.

В урне имеются один белый и два черных шара. Эксперимент состоит из события выборки одного шара. Сколько необходимо провести экспериментов, чтобы с вероятностью  $0.95$  утверждать, что полученная оценка вероятности выбора белого шара не отличается от истинной вероятности на величину  $0.01$ .

## 2.3 Занятие 4. Контрольная работа

**Цель занятия** — закрепление и оценка навыков математического и компьютерного моделирования технологии реализации «модели Лапласа».

На основе индивидуального задания, выданного преподавателем:

- выполнить математическое и компьютерное моделирование в соответствии с требованиями занятий 2 и 3;
- отразить результаты моделирования в личном отчете;
- пройти оценивание полученных результатов преподавателем.

Результат оценивания преподавателем выставляется в качестве оценки по первой контрольной точке.

## 3 Тема 3. Вероятностные модели

Практические занятия по теме 3 посвящены закреплению на практике технологии решения задач, которые описаны моделями известными как схемы Бернулли и Пуассона.

**Схема Бернулли** — модель последовательности случайных независимых событий, каждое из которых происходит с фиксированной вероятностью  $p$ .

**Схема Пуассона** — модель последовательности случайных зависимых событий, вероятность каждого из которых хотя и фиксирована, но зависит от числа проведенных экспериментов, заданных выражением  $a=n*p=const$ , где  $p$  — вероятность отдельного события, а  $n$  — число проведенных экспериментов.

### 3.1 Занятие 5. Вероятностные модели Бернулли и Пуассона

**Цель занятия** — закрепление математического аппарата схемы Бернулли и Пуассона на примерах решения конкретных задач.

#### 3.1.1 Требования к результатам моделирования

Построить математические модели решения задач при выполнении следующих требований:

- определение типа (схемы) модели на основе текстового описания задачи;
- построение математической модели посредством формализация свойств выделенных объектов;
- вычисление математического ожидания случайной величины, формализующей целевую часть задачи;
- вычисление дисперсии случайной величины, формализующей целевую часть задачи.

#### 3.1.2 Список задач

##### Задача 1.

Процесс изготовления лампочек накаливания на заводе полностью автоматизирован.

Известно, что процент брака изготовленной продукции равен  $m$ .

Построить адекватную модель случайной величины  $m$ .

##### Задача 2.

При перевозке, первоначально исправных лампочек накаливания, с предприятия в торговые точки, процент брака доставленной продукции равен  $n$ .

Построить адекватную модель случайной величины  $n$ .

**Задача 3.**

В процессе эксплуатации каждая первоначально исправная лампочка приходит в негодность со средним временем на отказ  $k$  часов.

Построить адекватную модель случайной величины  $k$ .

**3.2 Занятие 6. Решение задач**

**Цель занятия** — закрепление навыков компьютерного моделирования технологии реализации моделей задач по схемам Бернулли и Пуассона.

**3.2.1 Требования к результатам моделирования**

Построить математические модели решения задач при выполнении требований «Занятия 5».

Построить компьютерные модели, имитирующие постановочную часть задач, при выполнении требований:

- компьютерная модель реализуется на языке С;
- вероятностные события моделируются стандартным датчиком случайных чисел.

**3.2.2 Список задач**

Компьютерное моделирование проводится на основе списка задач, определенного на «Занятии 5».

**3.3 Занятие 7. Контрольная работа**

**Цель занятия** — закрепление и оценка навыков математического и компьютерного моделирования технологии реализации задач по схемам Бернулли и Пуассона.

На основе индивидуального задания, выданного преподавателем:

- выполнить математическое и компьютерное моделирование в соответствии требованиями занятий 5 и 6;
- отразить результаты моделирования в личном отчете;
- пройти оценивание полученных результатов преподавателем.

Результат оценивания преподавателем выставляется в качестве оценки по второй контрольной точке.

## 4 Тема 4. Критерии принятия решений

Практические занятия по теме 4 посвящены закреплению на практике технологии решения задач, которые основаны на связывании неизвестных переменных критериями принятия решений.

Класс используемых нормативных математических моделей ограничен применением двух критериев оптимизации, заданных выражениями:

$$\min_n P(x < m_2(n)) = \min_n F(m_2(n)) = P_0 \quad (4.1)$$

$$\min_n P(|x| < m_2(n)) = \min_n (F(m_2(n)) - F(-m_2(n))) = P_0 \quad (4.2)$$

где  $x$  — случайная величина, фигурирующая в постановке задачи;

$n$  — число проведенных экспериментов;

$m_2(n)$  - значение интервальной оценки, как функция от числа экспериментов;

$P_0$  - вероятность, задающая достоверность искомой оценки.

### 4.1 Занятие 8. Моделирование критериев принятия решений

**Цель занятия** — применение критериев оптимизации (4.1) и (4.2) к моделям задач, определенных на «Занятии 5» (пункт 3.1.2).

В качестве дополнительных технологических факторов решения задач оптимизации вводятся понятия абсолютной и относительной точности решения, что уточняется выражениями:

$$\Delta = |x - m_2| \quad (4.3)$$

$$\delta = \frac{|x - m_2|}{|x|} \quad (4.4)$$

где  $\Delta$  - абсолютная точность;

$\delta$  — относительная точность.

С учетом введенных обозначений (4.1) — (4.4), практически интересными становятся следующие три варианта задач статистического оценивания.

#### 4.1.1 Задача об оценке одномерной случайной величины по результатам экспериментов

Определить минимально необходимое количество экспериментов  $n$ , чтобы с

вероятностью  $p_0$  оценить значение одномерной случайной величины, при ограничениях на точность  $\Delta = \Delta_0$  и  $\delta = \delta_0$ .

#### **4.1.2 Задача проверки гипотезы об оценке одномерной случайной величины по результатам экспериментов**

Проверить гипотезу о том, что по результатам  $n$  экспериментов, с вероятностью  $p_0$  оценка  $\hat{x}$  является значением одномерной величины  $x_0$ , при ограничениях на точность  $\Delta = \Delta_0$  и  $\delta = \delta_0$ .

#### **4.1.3 Задача различения оценок двух одномерных случайных величин по результатам экспериментов**

Проверить гипотезу о том, что по результатам  $n$  экспериментов, с вероятностью  $p_0$  оценки  $\hat{x}$  и  $\hat{y}$  являются измерениями различных величин, при ограничениях на точность  $\Delta = \Delta_0$  и  $\delta = \delta_0$ .

## **4.2 Занятие 9. Контрольная работа**

Последнее итоговое занятие.

### **Цели занятия:**

- выявление и устранение недочетов, допущенных на предыдущих занятиях;
- индивидуальное оценивание каждого магистранта по итогам практического закрепления учебного материала.

### **Замечание**

На результат итоговой оценки магистранта влияет своевременность и качество исполнения индивидуального отчета.

## Список использованных источников

- 1 Резник В.Г. Дискретные и вероятностные математические модели: методические указания по самостоятельной и индивидуальной работе студентов. – Томск, ТУСУР, 2017. – 12 с.
- 2 Резник В.Г. Учебный программный комплекс кафедры АСУ на базе ОС ArchLinux. Учебно-методическое пособие. – Томск, ТУСУР, 2017. – 38 с.

Учебное издание

**Резник** Виталий Григорьевич

**ДИСКРЕТНЫЕ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ**

Учебно-методическое пособие предназначено для проведения практических занятий по дисциплине «Дискретные и вероятностные математические модели» уровня основной образовательной программы магистратура направления подготовки: 01.04.02 - «Прикладная математика и информатика».

Учебно-методическое пособие

Усл. печ. л. . Тираж . Заказ .  
Томский государственный университет  
систем управления и радиоэлектроники  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40