

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

**Ю.Е. Воскобойников**  
**А.А. Мицель**

# **СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

Часть 2. Практикум

Учебное пособие

ТОМСК 2015

УДК 519.2  
ББК 22.172  
В 650

**Воскобойников Ю. Е., Мицель А.А.**

Современные проблемы прикладной математики. Часть 2. Практикум: учебное пособие/ Ю. Е. Воскобойников, А.А. Мицель/ Томский гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР). – Томск, 2015. – 52с.

В учебном пособии в первой части приводится системное изложение одного из разделов прикладной математики, связанного с устойчивыми методами и алгоритмами решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при параметрической идентификации моделей. Основное внимание уделяется построению решений с минимальной ошибкой или с требуемыми точностными характеристиками, а также учету имеющейся априорной информации об искомом решении. Во второй части приводится описание практических занятий по созданию алгоритмов построения нормального псевдорешения и регуляризованных решений систем линейных алгебраических уравнений.

Учебное пособие предназначено для магистрантов направления «Прикладная математика и информатика». Результаты будут полезны также широкому кругу студентов, магистрантов, аспирантов, исследователей, занимающихся решением задач параметрической идентификации и обработки экспериментальных данных.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

#### Построение нормального псевдорешения СЛАУ . 5

§ 1.1. Постановка задачи .....	5
§ 1.2. SVD-алгоритм построения нормального псевдорешения.....	6
Задание 1.1.....	8
Задание 1.2.....	12

### ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

#### Построение регуляризованного решения СЛАУ . 14

§2.1. Байесовский регуляризирующий алгоритм.....	14
Задание 2.1.....	16
§2.2. Оптимальный регуляризирующий SVD-алгоритм	17
Задание 2.2.....	20
§2.3. Построение регуляризованного решения при неполной информации.....	21
Задание 2.3.....	26
§2.4. Регуляризирующий SVD-алгоритм.....	27
Задание 2.4.....	30

### ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

#### Алгоритмы выбора параметра регуляризации . 35

§3.1. Выбор параметра регуляризации на основе критерия оптимальности.....	35
Задание 3.1.....	36
§3.2. Алгоритм выбора параметра регуляризации с использованием SVD-разложения на основе критерия оптимальности.....	36
Задание 3.2.....	38
§3.3. Алгоритм выбора параметра регуляризации основе статистического принципа невязки.....	38

Задание 3.3.....	40
§3.4. Алгоритм поиска $\alpha_{\gamma}$ с использованием SVD разложения.....	41
Задание 3.4.....	42

### ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

#### Локальная регуляризация ..... 43

§4.1. Векторный параметр регуляризации.....	43
Задание 4.1.....	45

### ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

#### Дескриптивные алгоритмы решения СЛАУ ..... 46

§5.1. Глобальный дескриптивный регуляризирующий алгоритм .....	46
Задание 5.1.....	49
§ 5.2. Локальный дескриптивный регуляризирующий алгоритм .....	49
Задание 5.2.....	51

#### ЛИТЕРАТУРА..... 52

## Практическое занятие №1

### Построение нормального псевдорешения СЛАУ

#### §1.1. Постановка задачи

Дана система линейных алгебраических уравнений матричном виде

$$K\varphi = \tilde{f}, \quad (1.1)$$

где  $K$  – матрица размером  $N \times M$  ( $N$  строк и  $M$  столбцов),  $\varphi$  – вектор размерности  $M$  (содержит  $M$  проекций),  $\tilde{f}$  – вектор размерности  $N$

$$\tilde{f} = \bar{f} + \eta$$

Здесь  $\bar{f}$  – вектор точной правой части,  $\eta$  – вектор ошибок.

Предположим, что матрица  $K$  имеет размеры  $N \times M$ . Вектор  $\varphi_{HK}$  размерностью  $M$  называют *псевдорешением* (или решением МНК), если он доставляет минимум следующему функционалу

$$\Psi_{HK}(\varphi) = \left\| \tilde{f} - K\varphi \right\|^2 = (\tilde{f} - K\varphi)^T (\tilde{f} - K\varphi) \quad (1.2)$$

среди всех векторов евклидова пространства  $E^M$ .

Решение, обеспечивающее минимум функционалу (2), является решением следующей СЛАУ

$$K^T K \varphi_{HK} = K^T \tilde{f}, \quad (1.3)$$

которая называется системой нормальных уравнений.

В отличие от исходной системы  $K\varphi = \tilde{f}$  эта система всегда разрешима, т.е. для любой правой части  $\tilde{f}$  существует

псевдорешение  $\varphi_{HK}$ . Если матрица  $K$  имеет ранг, равный  $M$ , то

$$\varphi_{HK} = (K^T K)^{-1} K^T \tilde{f}. \quad (1.4)$$

*Сингулярным разложением* прямоугольной  $N \times M$  матрицы  $K$  (коротко: SVD-разложением) называется представление:

$$K = U \Lambda V^T, \quad (1.5)$$

где  $U$  – ортогональная ( $N \times N$ )-матрица,  $V$  – ортогональная ( $M \times M$ )-матрица,  $\Lambda$  – ( $N \times M$ )-матрица вида

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_M \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

в которой последние  $N - M$  строки содержат только нулевые элементы. Величины  $\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, M$ , называются

*сингулярными числами* матрицы  $K$ , и в дальнейшем полагаем, что

$\lambda_j$  упорядочены по убыванию, т.е.  $\lambda_j \geq \lambda_{j+1}$ . Напомним, что

матрица  $V$  называется *ортогональной*, если имеет место тождество  $V^T V = B B^T = I$

#### §1.2. SVD-алгоритм построения нормального псевдорешения

Введем векторы

$$y = U^T \tilde{f}, \quad x = V^T \varphi \quad (1.7)$$

размерностью  $N$  и  $M$  соответственно. Тогда с учетом (1.5) систему  $K\varphi = \tilde{f}$  можно преобразовать к эквивалентной системе:

$$\begin{aligned} \lambda_j x_j &= y_j, & j &= 1, \dots, M; \\ 0 &= y_j, & j &= M+1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.8)$$

которая хорошо характеризует «информативность» правой части: чем меньше сингулярное число  $\lambda_j$ , тем с меньшим весом проекция  $x_j$  входит в правую часть. Предельный случай  $\lambda_j = 0$ ,  $p+1 \leq j \leq M$ , говорит о вырожденности  $K$ .

Очевидно, что невыполнение условия  $\sum_{j=M+1}^N |y_j| = 0$  говорит о несовместности исходной системы.

С учетом ортогональности матриц  $U$ ,  $V$  и соотношений (5) функционал (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Psi_{HK}(\varphi) = \Psi_{HK}(x) &= \sum_{j=1}^p (y_i - \lambda_j x_j)^2 + \\ &+ \sum_{j=p+1}^M (y_j - 0 \cdot x_j)^2 + \sum_{j=M+1}^N y_j^2. \end{aligned}$$

Третье слагаемое обусловлено несовместностью исходной системы, и не зависит от  $x$ . Второе слагаемое отражает вырожденность системы, и, следуя определению нормального псевдорешения, проекции  $x_j$ , входящие во второе слагаемое, следует принять равным 0. Тогда минимум функционала достигается на векторе  $x^+$  размерности  $p$  с элементами

$$x_j^+ = \frac{y_j}{\lambda_j}, \quad j = 1, \dots, p, \quad (1.9)$$

а нормальное псевдорешение  $\varphi^+$  выражается как

$$\varphi^+ = \sum_{j=1}^p x_j^+ \cdot v_j. \quad (1.9)$$

Напомним, что  $\lambda_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, p$ , где  $p$  – ранг матрицы  $K$ .

**Задание 1.1.** Построить нормальное псевдорешение с помощью пакета Mathcad

Рассмотрим две функции Mathcad, которые потребуются для построения нормального псевдорешения  $\tilde{\varphi}^+$ , определяемого выражением

$$\tilde{\varphi}^+ = \sum_{j=1}^{p_{II}} \frac{\langle \tilde{f}, u_j \rangle}{\lambda_j} \cdot v_j, \quad (1.10)$$

где практический ранг  $p_{II}$  матрицы  $K$  определяется количеством сингулярных чисел  $\lambda_j$ , удовлетворяющих условию:

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_{\max}} \geq \gamma_0, \quad (1.11)$$

где  $\gamma_0$  – достаточно малая величина ( $10^{-10} \div 10^{-8}$ ).

**Функция svds.** Обращение имеет вид  $svds(K)$ . Вычисляет вектор размерности  $M$ , состоящий из сингулярных чисел  $\lambda_j$  матрицы  $K$ , которые расположены в убывающем порядке.

**Функция svd.** Обращение имеет вид  $svd(K)$ . Вычисляет матрицу  $UV$  размером  $(N+M) \times M$ . Первые  $N$  строк этой матрицы соответствуют матрице  $\underline{U}$  размером  $N \times M$ , которая определяет первые  $M$  столбцов матрицы  $U$ , т.е.

$$U = \left[ \underline{u} : u_{M+1} : \dots : u_N \right]. \quad (1.12)$$

Последние  $M$  строк матрицы  $UV$  содержат матрицу  $V$  размером  $M \times M$ .

Заметим, что отсутствие в матрице  $\underline{U}$  последних  $N - M$  столбцов матрицы  $U$  обусловлено тем, что эти столбцы не участвуют в вычислении нормального псевдорешения и поэтому во многих программных реализациях SVD-разложения эти столбцы не вычисляются.

**Функция *submatrix*.** Обращение имеет вид *submatrix* ( $K, i1, i2, j1, j2$ ). Формирует новую матрицу из элементов матрицы  $K$ , стоящих с  $i1$  по  $i2$  строках и с  $j1$  по  $j2$  столбцах матрицы  $K$ .

**Пример 1.** Дана матрица  $K$  размером  $6 \times 3$ . Необходимо вычислить сингулярные числа и матрицы  $\underline{U}, V$ .

**Решение.** На рис. 1.1 показан фрагмент документа Mathcad, выполняющий требуемые вычисления. Здесь же приведены вычисление числа обусловленности по формуле

$$\text{cond}(K) = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$$

и проверка ортогональности столбцов матриц  $\underline{U}, V$ . ☺

Перейдем к подпрограмме-функции (П-Ф) *Ps\_Solve*, осуществляющей построение нормального псевдорешения СЛАУ по формуле (1.1). Обращение к П-Ф имеет вид:

$$Ps\_Solve(K, f, \gamma_0). \quad (1.13)$$

**Формальные параметры:**  $K$  – матрица системы размером  $N \times M$ ,  $f$  – правая часть системы,  $\gamma_0$  – переменная вещественного типа, входящая в условие (1.11).

На рис. 1.2 приведен фрагмент документа Mathcad с текстом П-Ф *Ps\_Solve*.

**Замечание 1.** При обработке матриц в пакете Mathcad часто используется операция формирования вектора из определенного столбца матрицы. Для этого надо ввести имя матрицы, затем нажать клавиши [Ctrl+6] и в появившихся вверху угловых скобках задать нужный номер столбца. Например, в П-Ф *Ps\_Solve* стоят операции  $U^{(j)}, V^{(j)}$ . ♦

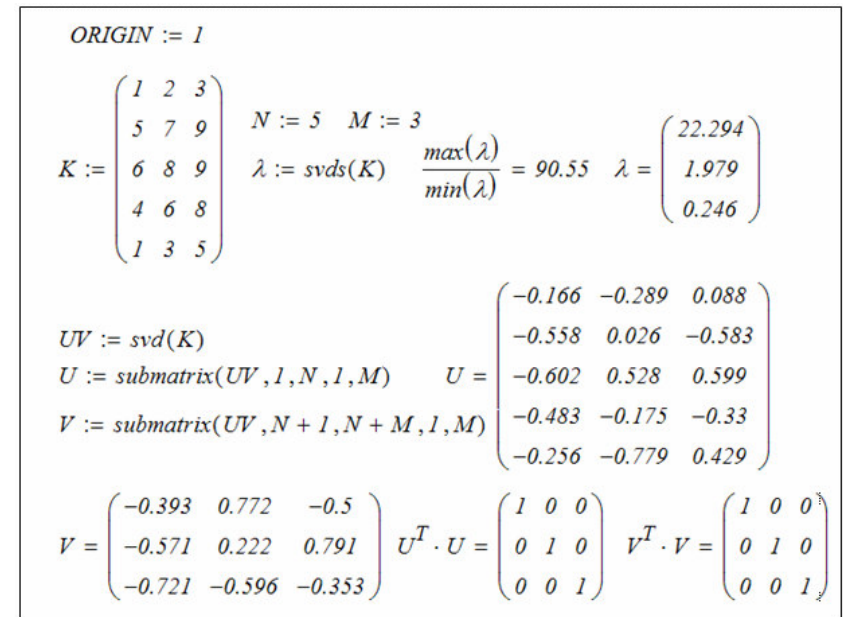


Рис. 1.1. Сингулярное разложение матрицы  $K$

```

Ps_Solve(K, f, γ₀) :=
  N ← rows(K)
  M ← cols(K)
  λ ← svds(K)
  UV ← svd(K)
  U ← submatrix(UV, 1, N, 1, M)
  V ← submatrix(UV, N + 1, N + M, 1, M)
  λ_max ← max(λ)
  φ_ps ← ∑_{j=1}^M if [ (λ_j / λ_max) ≥ γ₀, (f · U^{(j)}) · V^{(j)}, 0 · V^{(j)} ]

```

Рис. 1.2. Текст подпрограммы-функции *Ps\_Solve*

**Пример 2.** Матрица  $K$  размером  $5 \times 3$  формируется с использованием П-Ф *Form\_K* (фрагмент документа показан на рис. 1.3). Число обусловленности  $1.426 \cdot 10^6$ . Для заданного вектора  $\phi$  вычислены два вектора: вектор «точной» правой части  $f$  и вектор «зашумленной» правой части  $f_\eta$  с относительной погрешностью  $3.232 \cdot 10^{-3}$  (см. рис. 1.3). По этим двум векторам необходимо построить нормальные псевдорешения с использованием П-Ф *Ps\_Solve*.

Здесь вычислены относительные ошибки двух псевдорешений: псевдорешение  $\phi_{1ps}$ , построенное по точной правой части, и псевдорешение  $\phi_{2ps}$ , построенное по искаженной правой части  $f_\eta$ . Несмотря на маленькую погрешность исходных данных, относительная ошибка решения  $\phi_{2ps}$  достигает большой величины  $1.102 \cdot 10^3$ , и эта ошибка удовлетворяет неравенству

$$\frac{\|\tilde{\phi} - \bar{\phi}\|}{\|\bar{\phi}\|} \leq \text{cond}(K) \frac{\|\tilde{f} - \bar{f}\|}{\|\bar{f}\|}.$$

Действительно

$$1.103 \cdot 10^3 \leq \text{cond}(K) \cdot 3.232 \cdot 10^{-3} = 4.609 \cdot 10^3.$$

### Задание 1.2.

Вычислить нормальное решение с помощью обратной матрицы по формуле (1.4) для точной и зашумленной правой части и сравнить с решением, полученным SVD – алгоритмом.

*Решение.* Два обращения к *Ps\_Solve* показаны на рис. 1.3.

```

ORIGIN := 1
Form_K(N, M, σ) :=
  for i ∈ 1..N
    for j ∈ 1..M
      K_{i,j} ← exp [ - ( (j - M/N · i)² ) / σ² ]
  K

```

$K := \text{Form\_K}(5, 3, 30)$       $\text{Cond}(K) := \begin{cases} k \leftarrow \frac{\max(\text{svds}(K))}{\min(\text{svds}(K))} \\ k \end{cases}$   
 $\text{Cond}(K) = 1.426 \times 10^6$

$\phi := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$       $f := K \cdot \phi$       $f = \begin{pmatrix} 9.955 \\ 9.976 \\ 9.99 \\ 9.995 \\ 9.992 \end{pmatrix}$       $f_\eta := \begin{pmatrix} 10.01 \\ 9.96 \\ 10.03 \\ 9.98 \\ 10.00 \end{pmatrix}$   
 $\frac{|f - f_\eta|}{|f|} = 3.232 \times 10^{-3}$

$\phi_{1ps} := \text{Ps\_Solve}(K, f, 10^{-10})$       $\phi_{2ps} := \text{Ps\_Solve}(K, f_\eta, 10^{-10})$   
 $\frac{|\phi - \phi_{1ps}|}{|\phi|} = 7.045 \times 10^{-11}$       $\frac{|\phi - \phi_{2ps}|}{|\phi|} = 1.102 \times 10^3$

**Примечание.** При наличии научной задачи магистранта, которую можно свести к системе линейных уравнений, построить нормальное псевдорешение для этой задачи.

## Практическое занятие №2

### Построение регуляризованного решения СЛАУ

#### §2.1. Байесовский регуляризирующий алгоритм

Исходной информацией являются:

- априорное распределение  $p(\varphi)$  искомого вектора решения  $\varphi$  является нормальным, т.е.

$$p(\varphi) = const \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\|\varphi - m_\varphi\|_{V_\varphi^{-1}}^2\right),$$
 где  $m_\varphi$  и  $V_\varphi$  - математическое ожидание и матрица ковариаций;

- условное распределение  $p(\tilde{f}|\varphi)$ , характеризующее распределение вектора измерений  $\tilde{f}$  при фиксированном векторе  $\varphi$  является нормальным,

$$p(\tilde{f}|\varphi) = const \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\|\tilde{f} - K\varphi\|_{V_\eta^{-1}}^2\right).$$

Здесь запись  $\|z - m_z\|_{V_z^{-1}}^2$  означает:

$$\|z - m_z\|_{V_z^{-1}}^2 = (z - m_z)^T V_z^{-1} (z - m_z).$$

Байесовское регуляризованное решение находится из системы линейных алгебраических уравнений

$$(K^T V_\eta^{-1} K + V_\varphi^{-1}) \varphi_B = K^T V_\eta^{-1} \tilde{f} + V_\varphi^{-1} m_\varphi. \quad (2.1)$$

Заметим, что вектор  $\varphi_B$  для указанных распределений и квадратичной функции потерь  $\Pi(\varphi_T, \varphi) = \|\varphi_T - \varphi\|^2$  максимизирует значения апостериорной плотности распределения  $p(\varphi | \tilde{f})$ , которая имеет вид

$$p(\boldsymbol{\varphi} | \tilde{f}) = \text{const} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|\tilde{f} - K\boldsymbol{\varphi}\|_{V_\eta^{-1}}^2 - \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\varphi} - m_\varphi\|_{V_\varphi^{-1}}^2 \right\},$$

а, следовательно, доставляет минимум функционалу

$$F_B[\boldsymbol{\varphi}] = \|\tilde{f} - K\boldsymbol{\varphi}\|_{V_\eta^{-1}}^2 + \|\boldsymbol{\varphi} - m_\varphi\|_{V_\varphi^{-1}}^2. \quad (2.2)$$

Рассмотрим точность построенного байесовского регуляризованного решения при следующих предположениях:

$$M[\boldsymbol{\eta}] = 0; \quad M[\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\eta}^T] = 0. \quad (2.3)$$

Последнее условие означает, что проекция  $\boldsymbol{\varphi}_j$  и  $\boldsymbol{\eta}_i$  не коррелированы между собой. Определим вектор ошибки решения как

$$\boldsymbol{\varepsilon}_B = \boldsymbol{\varphi}_B - \bar{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (2.4)$$

Ошибка может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_B &= (K^T V_\eta^{-1} K + V_\varphi^{-1})^{-1} (K^T V_\eta^{-1} (K\bar{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\eta}) + V_\varphi^{-1} m_\varphi) - \\ &- \bar{\boldsymbol{\varphi}} = (K^T V_\eta^{-1} K + V_\varphi^{-1})^{-1} \cdot [K^T V_\eta^{-1} \boldsymbol{\eta} + V_\varphi^{-1} (m_\varphi - \bar{\boldsymbol{\varphi}})]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Математическое ожидание  $M[\boldsymbol{\varepsilon}_B]$  равно:

$$M[\boldsymbol{\varepsilon}_B] = b_B = (K^T V_\eta^{-1} K + V_\varphi^{-1})^{-1} V_\varphi^{-1} (m_\varphi - M[\boldsymbol{\varphi}]). \quad (2.6)$$

Рассмотрим случайную ошибку  $\boldsymbol{\xi}_B = \boldsymbol{\varepsilon}_B - M[\boldsymbol{\varepsilon}_B]$ , которая представима в виде:

$$\boldsymbol{\xi}_B = (K^T V_\eta^{-1} K + V_\varphi^{-1})^{-1} \cdot K^T V_\eta^{-1} \boldsymbol{\eta}, \quad (2.7)$$

с математическим ожиданием  $M[\boldsymbol{\xi}_B] = 0$  и матрицей ковариации

$$V_{\boldsymbol{\xi}_B} = (K^T V_\eta^{-1} K + V_\varphi^{-1})^{-1} K^T V_\eta^{-1} K (K^T V_\eta^{-1} K + V_\varphi^{-1})^{-1}. \quad (2.8)$$

Вектор «полной» ошибки байесовского решения можно записать в виде:

$$\Delta_{B_j} = b_{B_j} + \sqrt{V_{\boldsymbol{\xi}_{jj}}}, \quad j = 1, \dots, M. \quad (2.9)$$

### Задание 2.1.

1. Задать матрицу системы  $K$ , вектор решения  $\boldsymbol{\varphi}$ , среднее значение  $m_\varphi$  и матрицу ковариации  $V_\varphi$ .

2. Для заданной матрицы  $K$  и вектора решения  $\boldsymbol{\varphi}$  вычислить правую часть  $\bar{f}$ .

3. Внести шум в правую часть, т.е. вычислить вектор

$\tilde{f} = \bar{f} + \boldsymbol{\eta}$ , где  $\boldsymbol{\eta}$  - вектор ошибки, вычисляемый с помощью нормального датчика случайных чисел для двух случаев:

а) ошибки не коррелированы. Значения СКО задать равными  $\sigma_{\eta_i} = \delta_i \cdot f_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;  $\delta_i = 0.01, 0.05, 0.01$ .

Матрица ковариации в этом случае будет диагональной  $V_\eta = \text{diag}(\sigma_{\eta_1}^2, \dots, \sigma_{\eta_N}^2)$ .

б) ошибки коррелированы. В этом случае вектор ошибок вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{\eta} = V_\eta^{1/2} \boldsymbol{\xi},$$

где  $V_\eta$  - заданная матрица ковариации;  $\boldsymbol{\xi}$  - вектор, проекции которого состоят из нормальных случайных величин с единичной дисперсией и нулевым средним.

4. Вычислить решение по формуле (2.1) и вектор ошибки (2.9).



**Примечание.** При наличии научной задачи магистранта, которую можно свести к системе линейных уравнений, провести исследования этой задачи.

## §2.2. Оптимальный регуляризирующий SVD-алгоритм

Регуляризованное решение запишем в виде

$$\varphi_R = VRU^T C_\eta^{-1/2} \tilde{f} \quad (2.10)$$

или в скалярном виде

$$\varphi_R = \sum_{j=1}^p \left[ \frac{\lambda_j^2}{\lambda_j^2 + q_j} \bar{x}_j^+ + \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + q_j} \cdot \langle u_j, n \rangle \right] v_j, \quad (2.11)$$

где матрица  $R$  размер  $M \times N$  имеет следующую структуру:

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & r_M & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

$$r_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

Величины  $r_j$  назовем регуляризирующими множителями.

Здесь  $n = C_\eta^{-1/2} \eta$ ,  $\bar{x}_j^+ = \langle v_j, \bar{\varphi}^+ \rangle$ ,  $\bar{\varphi}^+$  - нормальное точное псевдорешение, построенное для точной правой части и

определяемое формулой  $\bar{\varphi}^+ = \sum_{j=1}^p \frac{\langle \bar{f}, u_j \rangle}{\lambda_j} \cdot v_j$ ;  $v_j, u_j$  -  $j$ -й

столбец матрицы  $V$  и  $U$  соответственно;  $p$  - ранг матрицы  $K$ .

Матрица ковариации  $V_\eta$  представлена в виде

$$V_\eta = \sigma_\eta^2 \cdot C_\eta \quad (2.13)$$

Очевидно, от величины регуляризирующих множителей зависит ошибка решения  $\varphi_R$ , которую определим функционалом

$$\Delta(R) = M_\eta \left[ \left\| \varphi_R - \bar{\varphi}^+ \right\|^2 \right], \quad (2.14)$$

которая может быть записана в виде

$$\Delta(R) = \sum_{j=1}^p \left( \frac{q_j}{\lambda_j^2 + q_j} \right)^2 \cdot (\bar{x}_j^+)^2 + \sigma_\eta^2 \cdot \sum_{j=1}^p \left( \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + q_j} \right)^2, \quad (2.15)$$

Определим элементы матрицы  $R$  построенного алгоритма путем нахождения величин  $q_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , из условия минимума функционала  $\Delta(R)$ . Дифференцируя (2.15) по  $q_j$  и приравнивая производную нулю, получаем оптимальное значение

$$q_{onm_j} = \frac{\sigma_\eta^2}{(\bar{x}_j^+)^2}, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (2.16)$$

Оптимальное решение  $\varphi_{onm}$ , построение при  $q_j = q_{onm_j}$  имеет следующее SVD-представление:

$$\varphi_{onm} = \sum_{j=1}^p \left[ \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + q_{onm_j}} \cdot \langle u_j, C_\eta^{-1/2} \tilde{f} \rangle \right] v_j, \quad (2.17)$$

или в матричном виде:

$$\varphi_{onm} = V_p R_{ponm} U_p^T C_\eta^{-1/2} \tilde{f}, \quad (2.18)$$

где  $V_p$  – матрица размера  $M \times p$ , составленная из  $p$  первых столбцов матрицы  $V$ ;  $U_p$  – матрица размера  $N \times p$ , составленная из  $p$  первых столбцов матрицы  $U$ ;  $R_{ponm}$  – диагональная матрица размера  $p \times p$  следующей структуры:

$$R_{ponm} = \begin{vmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + q_{onm_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_2^2 + q_{onm_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_p}{\lambda_p^2 + q_{onm_p}} \end{vmatrix}. \quad (2.19)$$

Точность построенного решения определим вектором ошибки

$$\mathcal{E}_{onm} = \varphi_{onm} - \bar{\varphi}^+$$

оптимального решения  $\varphi_{onm}$  в виде следующей суммы векторов:

$$\mathcal{E}_{onm} = \varphi_{onm} - \bar{\varphi}_{onm} + \bar{\varphi}_{onm} - \bar{\varphi}^+ = \xi_{onm} + b_{onm}. \quad (2.20)$$

Вектор  $b_{onm} = \bar{\varphi}_{onm} - \bar{\varphi}^+$  определяет систематическую ошибку решения  $\varphi_{onm}$ . При этом  $b_{onm} = M_\eta [\mathcal{E}_{onm}]$  и поэтому вектор  $b_{onm}$  можно назвать смещением решения  $\varphi_{onm}$ . Вектор  $\xi_{onm} = \varphi_{onm} - \bar{\varphi}_{onm}$  является случайным вектором с нулевым средним  $M[\xi_{onm}] = 0$  и характеризует случайную ошибку решения  $\varphi_{onm}$ . Таким образом, для вектора смещения имеем

$$b_{onm} = \bar{\varphi}_{onm} - \bar{\varphi}^+ = VRU^T C^{-1/2} \bar{f} - \bar{\varphi}^+ = V(R\Lambda - I)\bar{x}^+. \quad (2.21)$$

Случайный вектор  $\xi_{onm}$

$$\xi_{onm} = \varphi_{onm} - \bar{\varphi}_{onm} = \varphi_{onm} = V_p R_{ponm} U_p^T C_\eta^{-1/2} \eta \quad (2.22)$$

имеет нулевое среднее и матрицу ковариации

$$V_\xi = \sigma_\eta^2 V_p R_{ponm}^2 V_p^T. \quad (2.23)$$

Таким образом, полная ошибка равна

$$\Delta_{onm_j} = b_{onm_j} + \sqrt{V_{\xi_{jj}}}, \quad j = 1, \dots, p. \quad (2.24)$$

## Задание 2.2.

1. Задать матрицу системы  $K$ , вектор решения  $\Phi$ , среднее значение  $m_\Phi$  и матрицу ковариации  $V_\Phi$ .
2. Для заданной матрицы  $K$  и вектора решения  $\Phi$  вычислить правую часть  $\bar{f}$ .
3. Внести шум в правую часть, т.е. вычислить вектор  $\tilde{f} = \bar{f} + \eta$ ,

где  $\eta$  - вектор ошибки, вычисляемый с помощью нормального датчика случайных чисел для двух случаев:

а) ошибки не коррелированы. Значения СКО задать равными  $\sigma_{\eta_i} = \delta_i \cdot f_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;  $\delta_i = 0.01, 0.05, 0.01$ . Матрица ковариации в этом случае будет диагональной  $V_{\eta} = \text{diag}(\sigma_{\eta_1}^2, \dots, \sigma_{\eta_N}^2)$ .

б) ошибки коррелированы. В этом случае вектор ошибок вычисляется по формуле  $\eta = V_{\eta}^{1/2} \xi$ , где  $V_{\eta}$  - заданная матрица ковариации;  $\xi$  - вектор, проекции которого состоят из нормальных случайных величин с единичной дисперсией и нулевым средним.

4. Представить матрицу ковариации ошибок  $V_{\eta}$  в форме

$$V_{\eta} = \sigma_{\eta}^2 \cdot C_{\eta}, \text{ где } C_{\eta} = \frac{1}{\sigma_{\eta}^2} V_{\eta}.$$

4. Вычислить решение по формуле (2.10) и вектор ошибки (2.24).

**Примечание.** При наличии научной задачи магистранта, которую можно свести к системе линейных уравнений, провести исследования этой задачи.

### §2.3. Построение регуляризованного решения при неполной информации

В ситуациях, когда отсутствует априорная информация о числовых характеристиках решения и шума, сглаживающий функционал имеет вид

$$F_{\alpha}[\varphi] = \|\tilde{f} - K\varphi\|_{W_f}^2 + \alpha \|\varphi - \omega_{\varphi}\|_{W_{\varphi}}^2 \quad (2.25)$$

В этом случае вектор  $\varphi_{\alpha}$ , доставляющий минимум функционалу (2.25), является решением системы

$$(K^T W_f K + \alpha W_{\varphi}) \varphi_{\alpha} = K^T W_f \tilde{f} + \alpha W_{\varphi} \omega_{\varphi}, \quad (2.26)$$

состоящей из  $M$  уравнений относительно  $M$  неизвестных.

Здесь  $\alpha > 0$  параметр регуляризации,  $\omega_{\varphi}$  - пробное решение. Параметр регуляризации является неизвестной величиной.

**Метод рандомизации.** Допустим, что априори известно о принадлежности искомого решения  $\bar{\varphi}$  гиперпрямоугольнику, определяемому неравенствами

$$\varphi_{\min_j} \leq \bar{\varphi}_j \leq \varphi_{\max_j}, \quad j = 1, \dots, M, \quad (2.27)$$

являющимися детерминированными ограничениями. Метод рандомизации позволяет интерпретировать детерминированные ограничения в терминах числовых характеристик некоторых вероятностных распределений (чаще всего нормального распределения). Первые два момента  $\hat{m}_{\varphi}$ ,  $\hat{V}_{\varphi}$  нормального распределения  $N(\hat{m}_{\varphi}, \hat{V}_{\varphi})$  определяется таким образом, чтобы случайный вектор, подчиняющийся этому распределению с вероятностью  $\beta$  попадал в гиперпрямоугольник (2.27).

Математическое ожидание  $\hat{m}_{\varphi}$  такого вектора определяется как

$$\hat{m}_{\varphi} = \left| \frac{\varphi_{\min_1} + \varphi_{\max_1}}{2}, \frac{\varphi_{\min_2} + \varphi_{\max_2}}{2}, \dots, \frac{\varphi_{\min_M} + \varphi_{\max_M}}{2} \right|^T, \quad (2.28)$$

а корреляционная матрица  $\hat{V}_{\varphi}$  является диагональной и вычисляется по формуле

$$\hat{V}_{\varphi} = \text{diag} \left\{ \frac{(\varphi_{\max_1} - \varphi_{\min_1})^2}{4\mu_{\beta}}, \dots, \frac{(\varphi_{\max_M} - \varphi_{\min_M})^2}{4\mu_{\beta}} \right\}. \quad (2.29)$$

Значение  $\mu_{\beta} = 3$ .

$$W_\varphi = D_p^T D_p, \quad (2.35)$$

Если матрица  $V_\eta$  задана, то, подставляя вычислительные описанным образом  $\hat{m}_\varphi$ ,  $\hat{V}_\varphi$  в систему уравнений (2.29), получаем матричную запись алгоритма нахождения «рандомизированного» регуляризованного решения  $\varphi_p$ :

$$\left( K^T V_\eta^{-1} K + \hat{V}_\varphi^{-1} \right) \varphi_p = K^T V_\eta^{-1} \tilde{f} + \hat{V}_\varphi^{-1} \hat{m}_\varphi. \quad (2.30)$$

Если информация о шуме измерения задана в виде системы неравенств

$$|\tilde{f}_i - f_i| \leq \delta_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.31)$$

то вновь обращаемся к методу рандомизации и вычисляем корреляционную матрицу  $\hat{V}_\eta$  по формуле

$$\hat{V}_\eta = \text{diag} \left\{ \frac{\delta_1^2}{12}, \frac{\delta_2^2}{12}, \dots, \frac{\delta_N^2}{12} \right\} \quad (2.32)$$

и используем ее в алгоритме (2.30).

Очевидно, что (2.30) является частным случаем системы (2.26) при следующих заменах:

$$W_f = \hat{V}_\eta^{-1}; \quad W_\varphi = \hat{V}_\varphi^{-1}; \quad \omega_\varphi = \hat{m}_\varphi; \quad \alpha = 1. \quad (2.33)$$

### Стабилизирующий функционал

Введем квадратичную форму

$$\varphi^T W_\varphi \varphi = \|\varphi\|_{W_\varphi}^2, \quad (2.34)$$

которую назовем стабилизирующим функционалом. Неотрицательно определенная матрица  $W_\varphi$  находится из условия: чем «глаже» вектор  $\varphi$ , тем меньшее значение принимает функционал (34). Исходя из этого условия, часто матрицу  $V_\varphi$  формируют как

где  $D_p$  – матрица, являющаяся дискретным аналогом оператора дифференцирования  $p$ -го порядка (и тогда говорят о регуляризации  $p$ -го порядка). Так, при  $p=0$  матрица  $W_\varphi$  является единичной размером  $M \times M$ .

Для  $p=1$  матрица  $W_\varphi$  имеет вид:

$$W_\varphi = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.36)$$

Если решение ищется на множестве векторов с ограниченной нормой, для которых отсутствует взаимосвязь между «соседними» проекциями, то целесообразно использовать единичную матрицу либо диагональную матрицу вида (2.29), в этом случае  $W_\varphi = \hat{V}_\varphi^{-1}$  и это будет соответствовать регуляризации нулевого порядка.

Вернемся к вектору  $\omega_\varphi$ , входящему в функционал (2.25) и названному «пробным» решением. При наличии априорной информации вида (2.27) его можно задать как  $\omega_\varphi = \hat{m}_\varphi$ , где  $\hat{m}_\varphi$  определяется выражением (2.28). При отсутствии такой информации традиционным заданием является  $\omega_\varphi = 0_M$ .

Матрицу  $W_f$  рекомендуется задавать с точностью до константы равной обратной матрицы  $V_\eta^{-1}$ , т.е.

$$W_f = C_f V_\eta^{-1}, \quad (2.37)$$

где константа  $C_f > 0$ . При наличии информации вида (31) матрицу  $V_\eta$  можно определить соотношением (2.32). При отсутствии информации о числовых характеристиках погрешностей  $\eta_i$  матрицу  $W_f$  можно задать диагональной. Ненулевые элементы такой матрицы интерпретируются как *весовые множители, определяющие значимость (или информативность) соответствующих проекций вектора правой части  $\bar{f}$* .

В предельном случае (соответствующем отсутствию информации об искомом решении и шуме измерения) матрицы  $W_f$  и  $W_\varphi$  задаются единичными, т.е.

$$W_f = I_{N \times N}; \quad W_\varphi = I_{M \times M}, \quad (2.38)$$

*Ошибка решения  $\varphi_\alpha$ .*

Определим ошибку решения  $\varphi_\alpha$ , определяемым вектором (2.26)

$$\varepsilon_\alpha = \varphi_\alpha - \bar{\varphi}^+,$$

где  $\bar{\varphi}^+$  – нормальное псевдорешение системы  $K\varphi = \bar{f}$  при точной правой части  $\bar{f}$ , т.е.  $\bar{\varphi}^+ = (K^T W_f K)^{-1} K^T W_f \bar{f}$ . Как и прежде, вектор  $\varepsilon_\alpha$  представим суммой векторов случайной  $\xi_\alpha$  и систематической  $b_\alpha$  ошибок:

$$\varepsilon_\alpha = \varphi_\alpha - \bar{\varphi}_\alpha^+ + \bar{\varphi}_\alpha^+ - \bar{\varphi}^+ = \xi_\alpha + b_\alpha. \quad (2.38)$$

Вектор  $b_\alpha = M_\eta[\varepsilon_\alpha]$  можно назвать смещением решения  $\varphi_\alpha$ .

Систематическая ошибка  $b_\alpha$  имеет вид

$$b_\alpha = \alpha (K^T W_f K + \alpha W_\varphi)^{-1} W_\varphi (\omega_\varphi - \bar{\varphi}^+). \quad (2.39)$$

Вектор

$$\xi_\alpha = \varepsilon_\alpha - M_\eta[\varepsilon_\alpha] = \varepsilon_\alpha - b_\alpha \quad (2.40)$$

является случайным вектором с нулевым средним и определяется выражением

$$\xi_\alpha = (K^T W_f K + \alpha W_\varphi)^{-1} K^T W_f \eta. \quad (2.41)$$

Ковариационная матрица  $V_{\xi_\alpha} = M[\xi_\alpha \xi_\alpha^T]$  этого вектора определяется выражением:

$$V_{\xi_\alpha} = (K^T W_f K + \alpha W_\varphi)^{-1} K^T W_f V_\eta W_f K (K^T W_f K + \alpha W_\varphi)^{-1},$$

Полагая  $W_f = V_\eta^{-1}$ , получим

$$V_{\xi_\alpha} = (K^T W_f K + \alpha W_\varphi)^{-1} K^T W_f K (K^T W_f K + \alpha W_\varphi)^{-1}, \quad (2.42)$$

Полная ошибка решения равна

$$\Delta_{\alpha_j} = b_{\alpha_j} + \sqrt{V_{\xi_{\alpha_{jj}}}}, \quad j = 1, \dots, M. \quad (2.43)$$

### Задание 2.3.

1. Задать матрицу системы  $K$ , вектор решения  $\varphi$ , ограничения на вектор  $\varphi$  вида (2.27).
2. Вычислить среднее значение  $\hat{m}_\varphi$  и матрицу ковариации  $\hat{V}_\varphi$  по формулам (2.28), (2.29).
3. Для заданной матрицы  $K$  и вектора решения  $\varphi$  вычислить правую часть  $\bar{f}$ .
4. Внести шум в правую часть, т.е. вычислить вектор  $\tilde{f} = \bar{f} + \eta$ ,

где  $\eta$  - вектор ошибки, вычисляемый с помощью нормального датчика случайных чисел для двух случаев:

а) ошибки не коррелированы. Значения СКО задать равными  $\sigma_{\eta_i} = \delta_i \cdot f_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;  $\delta_i = 0.01, 0.05, 0.01$ .

Матрица ковариации в этом случае будет диагональной  $V_{\eta} = \text{diag}(\sigma_{\eta_1}^2, \dots, \sigma_{\eta_N}^2)$ .

б) ошибки коррелированы. В этом случае вектор ошибок вычисляется по формуле  $\eta = V_{\eta}^{1/2} \xi$ , где  $V_{\eta}$  - заданная матрица ковариации;  $\xi$  - вектор, проекции которого состоят из нормальных случайных величин с единичной дисперсией и нулевым средним.

5. Задать ограничения на вектор  $\tilde{f}$  вида (2.31) и вычислить матрицу  $\hat{V}_{\eta}$  по формуле (2.32).

6. Вычислить решение системы (2.26) и погрешность по формуле (2.43) для следующих вариантов:

а)  $W_f = I$ ,  $W_{\varphi} = I$ ,  $\omega_{\varphi} = 0$ , для различных значений  $\alpha \in [10^{-8}, 1]$ . Значения  $\alpha$  определять по формуле  $\alpha_k = \alpha_{k-1} \cdot 10$ ;

б)  $W_f = \hat{V}_{\eta}^{-1}$ ,  $W_{\varphi} = \hat{V}_{\varphi}^{-1}$ ,  $\omega_{\varphi} = \hat{m}_{\varphi}$ ,  $\alpha = 1$ .

**Примечание.** При наличии научной задачи магистранта, которую можно свести к системе линейных уравнений, провести исследования этой задачи.

## §2.4. Регуляризирующий SVD-алгоритм

Обратимся к системе уравнений (2.26) и вычислим решение этой системы, используя сингулярное разложение.

Предположим, что матрица  $W_f$  неотрицательно определена, симметрична и допускает представление

$$W_f = W_f^{1/2} \cdot W_f^{1/2}. \quad (2.44)$$

Запишем сингулярное разложение

$$W_f^{1/2} K = U \Lambda V^T \quad (2.45)$$

и представим матрицу  $W_{\varphi}$  в форме

$$W_{\varphi} = V \cdot \text{diag}\{m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_M)\} \cdot V^T \quad (2.46)$$

Тогда вектор  $\varphi_{\alpha}$  регуляризованного решения СЛАУ можно представить как

$$\varphi_{\alpha} = \sum_{j=1}^p \left[ \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + \alpha m(\lambda_j)} \cdot \langle u_j, W_f^{1/2} \tilde{f} \rangle + \frac{\alpha m(\lambda_j)}{\lambda_j^2 + \alpha m(\lambda_j)} \right] v_j, \quad (2.47)$$

где  $v_j$ ,  $u_j$  -  $j$ -е столбцы матриц  $V$ ,  $U$  соответственно:  $p$  - ранг (или практический ранг) матрицы  $K$ . Из (2.47) непосредственно следует матричное представление решения  $\varphi_{\alpha}$ :

$$\varphi_{\alpha} = V_p R_{p\alpha} U_p^T W_f^{1/2} \tilde{f} + V_p Z_{p\alpha} V_p^T \omega_{\varphi}, \quad (2.48)$$

где  $V_p$  - матрица размера  $M \times p$ , составленная из  $p$  первых столбцов матрицы  $V$ ;  $U_p$  - матрица размера  $N \times p$ , составленная из  $p$  первых столбцов матрицы  $U$ ;  $R_{p\alpha}$  - диагональная матрица размера  $p \times p$  следующей структуры:

$$R_{p\alpha} = \begin{vmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \alpha m(\lambda_1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2 + \alpha m(\lambda_2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\lambda_p}{\lambda_p^2 + \alpha m(\lambda_p)} \end{vmatrix}. \quad (2.49)$$

Матрица  $Z_{p\alpha}$  имеет структуру

$$Z_{p\alpha} = \begin{vmatrix} \frac{\alpha m(\lambda_1)}{\lambda_1^2 + \alpha m(\lambda_1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha m(\lambda_2)}{\lambda_2^2 + \alpha m(\lambda_2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{m(\lambda_p)}{\lambda_p^2 + \alpha m(\lambda_p)} \end{vmatrix}. \quad (2.50)$$

Функция  $m(\lambda)$  является неубывающей функцией, например

$$m(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\gamma}, \quad (2.51)$$

где  $\gamma \geq 0$ . Если  $\gamma = 0$ , то  $W_\varphi = I$ , что соответствует регуляризации нулевого порядка. Чем больше значение  $\gamma$ , тем в большей степени проекции вектора  $\varphi_\alpha$  взаимосвязаны между собой. Это обусловлено тем, что векторы  $V_j$ , соответствующие малым  $\lambda_j$  и имеющие осциллирующие проекции, не войдут в решение  $\varphi_\alpha$  из-за пренебрежимо малого значения множителя  $\frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + \alpha m(\lambda_j)}$ .

Точность решения оценим как и ранее вектором  $\varepsilon_\alpha = \varphi_\alpha - \bar{\Phi}^+$ , который можно представить как  $\varepsilon_\alpha = \xi_\alpha + b_\alpha$ .

Тогда полная погрешность вычисляется по формуле

$$\Delta_{\alpha_j} = b_{\alpha_j} + \sqrt{V_{\xi\alpha_{jj}}}, \quad j = 1, \dots, M, \quad (2.52)$$

где вектор  $b_\alpha$  (см. формулу (39)) в сингулярном представлении равен

$$b_\alpha = V_p \cdot Z_{p\alpha} \cdot V_p^T (\omega_\varphi - \bar{\Phi}^+), \quad (2.53)$$

а матрица ковариации решения (42) имеет вид

$$V_{\xi\alpha} = V_p F_{p\alpha} V_p^T. \quad (2.54)$$

Матрица

$$F_{p\alpha} = \text{diag} \left\{ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \alpha m(\lambda_1)} \right)^2, \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2 + \alpha m(\lambda_2)} \right)^2, \dots, \left( \frac{\lambda_p}{\lambda_p^2 + \alpha m(\lambda_p)} \right)^2 \right\},$$

а вектор  $\bar{\Phi}^+$  равен  $\bar{\Phi}^+ = V \Lambda^{-1} U^T W^{1/2} \bar{f}$ .

#### Задание 2.4.

1. Задать матрицу системы  $K$ , вектор решения  $\Phi$ .
2. Для заданной матрицы  $K$  и вектора решения  $\Phi$  вычислить правую часть  $\bar{f}$ .
3. Внести шум в правую часть, т.е. вычислить вектор  $\tilde{f} = \bar{f} + \eta$ , где  $\eta$  - вектор ошибки, вычисляемый с помощью нормального датчика случайных чисел для двух случаев:

а) ошибки не коррелированы. Значения СКО задать равными  $\sigma_{\eta_i} = \delta_i \cdot f_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;  $\delta_i = 0.01, 0.05, 0.01$ . Матрица ковариации в этом случае будет диагональной  $V_{\eta} = \text{diag}(\sigma_{\eta_1}^2, \dots, \sigma_{\eta_N}^2)$ .

б) ошибки коррелированы. В этом случае вектор ошибок вычисляется по формуле  $\eta = V_{\eta}^{1/2} \xi$ , где  $V_{\eta}$  - заданная матрица ковариации;  $\xi$  - вектор, проекции которого состоят из нормальных случайных величин с единичной дисперсией и нулевым средним.

4. Задать ограничения на вектор  $\tilde{f}$  вида (2.31) и вычислить матрицу  $\hat{V}_{\eta}$  по формуле (2.32).

5. Представить матрицу ковариации ошибок  $\hat{V}_{\eta}$  в форме  $\hat{V}_{\eta} = \sigma_{\eta}^2 \cdot C_{\eta}$ , где  $C_{\eta} = \frac{1}{\sigma_{\eta}^2} \hat{V}_{\eta}$ .

6. Вычислить решение системы по формуле (2.48) и погрешность по формуле (2.52) для следующих данных:  $W_f = \hat{V}_{\eta}^{-1}$ ,  $W_{\varphi} = I$ ,  $\omega_{\varphi} = 0$  для различных значений  $\alpha \in [10^{-8}, 1]$ . Значения  $\alpha$  определять по формуле  $\alpha_k = \alpha_{k-1} \cdot 10$ . Значения параметра  $\gamma$  выбрать эмпирически.

**Примечание.** При наличии научной задачи магистранта, которую можно свести к системе линейных уравнений, провести исследования этой задачи.

## Практическое занятие №3

### Алгоритмы выбора параметра регуляризации

#### §3.1. Выбор параметра регуляризации на основе критерия оптимальности

Рассмотрим систему уравнений

$$K\varphi = \tilde{f}. \quad (3.1)$$

Здесь  $K$  - матрица системы размерности  $N \times M$ ,  $\tilde{f}$  - вектор правой части размерности  $N$ , равный  $\tilde{f} = \bar{f} + \eta$ , где  $\bar{f}$  - точная правая часть,  $\eta$  - погрешность правой части, которая описывается моментами 1-го и 2-го порядка  $M[\eta] = 0$ ,  $M[\eta\eta^T] = V_{\eta}$ . Матрица  $V_{\eta}$  допускает представление  $V_{\eta} = \sigma_{\eta}^2 \cdot C_{\eta}$ , где  $\sigma_{\eta}^2$  - скалярная величина,  $C_{\eta}$  - матрица размерности  $N \times N$ .

Регуляризованное решение системы (3.1)  $\varphi_{\alpha}$  является решением следующей системы уравнений

$$(K^T V_{\eta}^{-1} K + \alpha \sigma_{\eta}^2 W_{\varphi}) \varphi_{\alpha} = K^T V_{\eta}^{-1} \tilde{f}, \quad (3.2)$$

где  $\alpha > 0$  - параметр регуляризации.

Так как  $\sigma_{\eta}^2$  является константой, то в дальнейшем будем рассматривать систему вида

$$(K^T V_{\eta}^{-1} K + \alpha W_{\varphi}) \varphi_{\alpha} = K^T V_{\eta}^{-1} \tilde{f}. \quad (3.3)$$

В качестве матрицы  $W_{\varphi}$  используется либо единичная матрица (регуляризация нулевого порядка), либо матрица вида



$$W_\varphi = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(регуляризация первого порядка).

Рассмотрим вектор невязки  $e_\alpha = \tilde{f} - K\varphi_\alpha = E(\alpha)\tilde{f}$ , где  $E(\alpha)$  - оператор невязки, который для решения, определяемого из системы (3), равен

$$E(\alpha) = I - K(K^T V_\eta^{-1} K + \alpha W_\varphi)^{-1} K^T V_\eta^{-1} \text{ или} \\ E(\alpha) = V_\eta (V_\eta + \alpha^{-1} K W_\varphi^{-1} K^T)^{-1}. \quad (3.4)$$

Тогда для матрицы ковариации вектора невязки  $V_e(\alpha) = M[e_\alpha e_\alpha^T]$  мы можем записать:

$$V_e(\alpha) = E(\alpha) V_{\tilde{f}} E^T(\alpha). \quad (3.5)$$

где  $V_{\tilde{f}}$  - матрица ковариации вектора правой части

$$V_{\tilde{f}} = M[\tilde{f} \cdot \tilde{f}^T].$$

В качестве  $\alpha_{opt}$  возьмем такое значение  $\alpha_w$ , при котором принимается основная статистическая гипотеза:

$$H_0: V_e(\alpha) = V_\eta E^T(\alpha). \quad (3.6)$$

Таким образом, значение  $\alpha_w$  можно рассматривать как оценку оптимального параметра регуляризации  $\alpha_{opt}$ .

Для проверки гипотезы (3.6) введем статистику

$$\rho_w(\alpha) = e_\alpha^T [V_\eta E^T(\alpha)]^{-1} e_\alpha, \quad (3.7)$$

Подставляя (3.4) в (3.7), получим

$$\rho_w(\alpha) = \tilde{f}^T V_\eta^{-1} e_\alpha \text{ или} \\ \rho_w(\alpha) = \tilde{f}^T (V_\eta + \alpha^{-1} K W_\varphi^{-1} K^T)^{-1} \tilde{f}. \quad (3.8)$$

Введем параметр  $\gamma = 1/\alpha$ . Тогда выражение (3.9) примет вид

$$\rho_w(\gamma) = \tilde{f}^T (V_\eta + \gamma K W_\varphi^{-1} K^T)^{-1} \tilde{f}. \quad (3.9)$$

$$M[\rho_w(\gamma)] = Sp[(V_\eta E^T(\gamma))^{-1} (V_\eta E^T(\gamma))] = Sp[I_N] = N,$$

где  $I_N$  - единичная матрица размера  $N \times N$ .

Статистика  $\rho_w(\gamma)$  при  $\gamma = \gamma_w$  подчиняется  $\chi^2$ -распределению с  $N$  степенями свободы. Тогда проверка гипотезы (3.6) сводится к проверке предположения: *подчиняется ли величина  $\rho_w(\gamma)$   $\chi^2$ -распределению с  $N$  степенями свободы.* Для этого построим интервал

$$\Theta_N(\beta) = [\vartheta_N(\beta/2), \vartheta_N(1-\beta/2)], \quad (3.10)$$

где  $\vartheta_N(\beta/2)$  - квантиль  $\chi^2$ -распределения уровня  $\beta/2$ . Если  $\rho_w(\alpha)$  попадает в интервал (3.10), т.е. выполняется неравенство

$$\vartheta_N(\beta/2) \leq \rho_w(\gamma) \leq \vartheta_N(1-\beta/2), \quad (3.11)$$

то гипотеза (3.6) может быть принята с вероятностью ошибки первого рода, равной  $\beta$ . Следовательно, значение  $\alpha_w$ , при котором выполняется (3.11), является оценкой для  $\alpha_{opt}$ .

Для  $N \leq 10$  граничные точки интервала  $\Theta_N(\beta)$  - квантили  $\vartheta_N(\beta/2)$ ,  $\vartheta_N(1-\beta/2)$  при  $\beta = 0.1$  приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

$N$	4	5	6	7	8	9	10
-----	---	---	---	---	---	---	----

$\vartheta_N(0.0)$	0	1	1	2	2	3	3
	.71	.14	.64	.17	.73	.32	.94
$\vartheta_N(0.9)$	9	1	1	1	1	1	1
	.49	1.0	2.6	4.1	5.5	6.9	8.3

Если  $N > 10$ , то квантили достаточно точно могут аппроксимироваться следующими выражениями:

$$\vartheta_N(0.05) \approx N - 1.64\sqrt{2N}; \quad \vartheta_N(0.95) \approx N + 1.64\sqrt{2N}. \quad (3.12)$$

Для вычисления  $\gamma_w$  используем итерационную процедуру ньютоновского типа:

$$\gamma^{(n)} = \gamma^{(n-1)} - \frac{\rho_w(\gamma^{(n-1)}) - N}{\rho'_w(\gamma^{(n-1)})}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.13)$$

с начальным значением  $\gamma^{(0)} \sim 10^{-15}$ . В качестве  $\gamma_w$  принимается значение  $\gamma^{(n)}$ , удовлетворяющее (3.12). Заметим, что эта процедура решает нелинейное уравнение  $\rho_w(\gamma) = N$ , но момент останова определяется условием (3.12).

*Замечание.* Для вычисления статистики (3.9) необходимо вычислять обратную матрицу  $(V_\eta + \gamma KW_\phi^{-1} K^T)^{-1}$ , что приводит к увеличению трудоемкости вычислений. Чтобы этого избежать, запишем статистику  $\rho_w(\gamma)$  в форме  $\rho_w(\gamma) = \tilde{f}^T \cdot q_\gamma$ , где вектор  $q_\gamma$  является решением системы

$$(V_\eta + \gamma KW_\phi^{-1} K^T) \cdot q = \tilde{f}. \quad (3.14)$$

В формуле (3.14) используется производная  $\rho'_w(\gamma)$ , равная  $\rho'_w(\gamma) = \tilde{f}^T q'_\gamma$ , где вектор  $q'_\gamma$  является решением системы уравнений

$$(V_\eta + \gamma KW_\phi^{-1} K^T) \cdot (KW_\phi^{-1} K^T)^{-1} q' = -q_\gamma. \quad (3.15).$$

### Задание 3.1.

Для построенного регуляризованного решения в лабораторной работе №2 при неполной информации (см. задание 2.3 в работе №2) вычислить:

- 1) параметр регуляризации  $\alpha_w$ ;
- 2) регуляризованное решение  $\Phi_{\alpha_w}$ ;
- 3) ошибку решения  $\Delta_{\alpha_j} = b_{\alpha_j} + \sqrt{V_{\xi_{\alpha_{jj}}}}$ ,  $j = 1, \dots, M$

**Примечание.** При наличии научной задачи магистранта, которую можно свести к системе линейных уравнений, провести исследования этой задачи

### §3.2. Алгоритм выбора параметра регуляризации с использованием SVD-разложения на основе критерия оптимальности

Предположим, что:

- ковариационная матрица  $V_\eta$  допускает представление  $V_\eta = \sigma_\eta^2 C_\eta$ , и определим сингулярное разложение

$$C_\eta^{-1/2} K = U \Lambda V^T, \quad (3.16)$$

допуская при этом, что сингулярные числа  $\lambda_j$  упорядочены по убыванию, т.е.  $\lambda_j \geq \lambda_{j+1}$  и  $\lambda_j = 0, j = p+1, \dots, M$ , где  $p$  – ранг (или практический ранг) матрицы системы;

- регуляризованное решение  $\varphi_\alpha$  представимо в виде:

$$\varphi_\alpha = \sum_{j=1}^p \left[ \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + \alpha m(\lambda_j)} \cdot \langle u_j, C_\eta^{-1/2} \tilde{f} \rangle \right] v_j, \quad (3.17)$$

где  $m(\lambda)$  невозрастающая функция

$$m(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\tau}, \text{ где } \tau \geq 0.$$

Нетрудно показать, что вектор  $\varphi_\alpha$  является решением системы

$$(K^T C_\eta^{-1} K + \alpha W_\varphi) \varphi_\alpha = K^T C_\eta^{-1} \tilde{f}, \quad (3.18)$$

в которой матрица  $W_\varphi$  выражается соотношением:

$$W_\varphi = V_p \text{diag}\{m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_M)\} V_p^T,$$

где  $V_p$  – матрица размера  $M \times p$ , составленная из  $p$  первых столбцов матрицы  $V$ , входящей в разложение (3.16).

Теперь статистику  $\rho_w(\alpha)$  можно записать в виде

$$\rho_w(\alpha) = \frac{1}{\sigma_\eta^2} (C_\eta^{-1/2} \tilde{f})^T (C_\eta^{-1/2} e_\alpha), \quad (3.19)$$

где векторы  $C_\eta^{-1/2} \tilde{f}$ ,  $C_\eta^{-1/2} e_\alpha$  допускают представление:

$$C_\eta^{-1/2} \tilde{f} = \sum_{j=1}^N \langle u_j, C_\eta^{-1/2} \tilde{f} \rangle \cdot u_j = \sum_{j=1}^N \tilde{y}_j u_j, \quad (3.20)$$

$$C_\eta^{-1/2} e_\alpha = \sum_{j=1}^p \left[ \frac{\alpha m(\lambda_j)}{\lambda_j^2 + \alpha m(\lambda_j)} \tilde{y}_j \right] u_j + \sum_{j=p+1}^N \tilde{y}_j u_j \quad (3.21)$$

где  $\tilde{y}_j = \langle u_j, C_\eta^{-1/2} \tilde{f} \rangle$ . Тогда

$$\rho_w(\alpha) = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \left[ \sum_{j=1}^p \frac{\alpha m(\lambda_j)}{\lambda_j^2 + \alpha m(\lambda_j)} \tilde{y}_j^2 + \sum_{j=p+1}^N \tilde{y}_j^2 \right]. \quad (3.22)$$

Введем  $\gamma = 1/\alpha$  и функции

$$R_w(\gamma) = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \cdot \sum_{j=1}^p \frac{m(\lambda_j)}{\gamma \lambda_j^2 + m(\lambda_j)} \cdot \tilde{y}_j^2, \quad (3.23)$$

$$R'_w(\gamma) = \frac{\partial R_w(\gamma)}{\partial \gamma} = -\frac{1}{\sigma_\eta^2} \cdot \sum_{j=1}^p \frac{\lambda_j^2 m(\lambda_j)}{[\gamma \lambda_j^2 + m(\lambda_j)]^2} \cdot \tilde{y}_j^2. \quad (3.24)$$

Для вычисления  $\gamma_w$  используем итерационную процедуру:

$$\gamma^{(n)} = \gamma^{(n-1)} - \frac{R_w(\gamma^{(n-1)}) - p}{R'_w(\gamma^{(n-1)})}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.25)$$

с начальным значением  $\gamma^{(0)} \sim 10^{-15}$ . В качестве  $\gamma_w$  принимается значение  $\gamma^{(n)}$ , удовлетворяющее условию

$$\vartheta_p(\beta/2) \leq R_w(\gamma) \leq \vartheta_p(1 - \beta/2). \quad (3.26)$$

### Задание 3.2.

Для построенного регуляризованного решения в лабораторной работе №2 при неполной информации (см. задание 2.4 в работе №2) используя SVD-разложение, вычислить:

- 1) параметр регуляризации  $\alpha_w$ ;
- 2) регуляризованное решение  $\Phi_{\alpha_w}$ ;
- 3) ошибку решения  $\Delta_{\alpha_j} = b_{\alpha_j} + \sqrt{V_{\xi \alpha_{jj}}}$ ,  $j = 1, \dots, M$ .

**Примечание.** При наличии научной задачи магистранта, которую можно свести к системе линейных уравнений, провести исследования этой задачи

### §3.3. Алгоритм выбора параметра регуляризации основе статистического принципа невязки

Для вычисления значения  $\alpha_w$  проверяется статическая гипотеза

$$H_0 : V_e(\alpha) = V_\eta \quad (3.27)$$

Для проверки (3.27) введем статистику  $\rho_V(\alpha) = e_\alpha^T V_\eta^{-1} e_\alpha$ .

Здесь  $e_\alpha = \tilde{f} - K\varphi_\alpha$  - вектор невязки. Учтывая, что

$\varphi_\alpha = (K^T V_\eta^{-1} K + \alpha W_\varphi)^{-1} K^T V_\eta^{-1} \tilde{f}$ , получим:

$$\begin{aligned} e_\alpha &= \tilde{f} - K\varphi_\alpha = \tilde{f} - K(K^T V_\eta^{-1} K + \alpha W_\varphi)^{-1} K^T V_\eta^{-1} \tilde{f} = \\ &= V_\eta (V_\eta + \alpha^{-1} K W_\varphi^{-1} K^T)^{-1} \tilde{f} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Тогда выражение для статистики примет вид:

$$\begin{aligned} \rho_V(\alpha) &= e_\alpha^T V_\eta^{-1} e_\alpha = \\ &= \tilde{f}^T (V_\eta + \alpha^{-1} K W_\varphi^{-1} K^T)^{-1} V_\eta (V_\eta + \alpha^{-1} K W_\varphi^{-1} K^T)^{-1} \tilde{f} \end{aligned}$$

Введем  $\gamma = 1/\alpha$ , получим

$$\rho_V(\gamma) = \tilde{f}^T (V_\eta + \gamma K W_\varphi^{-1} K^T)^{-1} V_\eta (V_\eta + \gamma K W_\varphi^{-1} K^T)^{-1} \tilde{f}. \quad (3.29)$$

Вычислим производную по  $\gamma$ . Для этого представим  $\rho_V(\gamma)$  в виде

$$\rho_V(\gamma) = g^T V_\eta g, \quad (3.30)$$

где

$$g = (V_\eta + \gamma K W_\varphi^{-1} K^T)^{-1} \tilde{f}. \quad (3.31)$$

Тогда производная от  $\rho_V(\gamma)$  равна

$$(\rho_V(\gamma))' = 2g^T V_\eta g', \quad (3.32)$$

где

$$\begin{aligned} g' &= -(K W_\varphi^{-1} K^T) (V_\eta + \gamma K W_\varphi^{-1} K^T)^{-2} \tilde{f} = \\ &= -(K W_\varphi^{-1} K^T) (V_\eta + \gamma K W_\varphi^{-1} K^T)^{-1} g \end{aligned} \quad (3.33)$$

Вычисление  $g'$  по формуле (3.33) эквивалентно решению системы уравнений

$$(V_\eta + \gamma K W_\varphi^{-1} K^T) (K W_\varphi^{-1} K^T)^{-1} g' = -g. \quad (3.34)$$

Для вычисления  $\gamma_V$  используем итерационную процедуру ньютоновского типа:

$$\gamma^{(n)} = \gamma^{(n-1)} - \frac{\rho_V(\gamma^{(n-1)}) - N}{\rho_V'(\gamma^{(n-1)})}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.35)$$

с начальным условием  $\gamma^{(0)} \sim 10^{-15}$ .

Итерационный процесс завершаем при выполнении условия

$$\vartheta_N(\beta/2) \leq \rho_V(\gamma) \leq \vartheta_N(1 - \beta/2). \quad (3.36)$$

где  $\vartheta_N(\beta/2)$ ,  $\vartheta_N(1 - \beta/2)$  - квантили  $\chi^2$ -распределения с  $N$  степенями свободы уровней  $\beta/2$ ,  $1 - \beta/2$  соответственно.

### Задание 3.3.

Для построенного регуляризованного решения в лабораторной работе №2 при неполной информации (см. задание 4 в работе №2) вычислить:

- 1) параметр регуляризации  $\alpha_v$ ;
- 2) регуляризованное решение  $\Phi_{\alpha_v}$ ;
- 3) ошибку решения  $\Delta_{\alpha_j} = b_{\alpha_j} + \sqrt{V_{\xi\alpha_{jj}}}$ ,  $j = 1, \dots, M$ .

### §3.4. Алгоритм поиска $\alpha_V$ с использованием SVD разложения

Пусть ковариационная матрица  $V_\eta$  допускает представление  $V_\eta = \sigma_\eta^2 C_\eta$ . Запишем сингулярное разложение (3.16)

$$C_\eta^{-1/2} K = U \Lambda V^T.$$

Теперь статистику  $\rho_V(\alpha)$  можно записать в виде

$$\rho_V(\alpha) = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \left( C_\eta^{-1/2} e_\alpha \right)^T \left( C_\eta^{-1/2} e_\alpha \right), \quad (3.37)$$

где вектор  $C_\eta^{-1/2} e_\alpha$  допускает представление:

$$C_\eta^{-1/2} e_\alpha = \sum_{j=1}^p \left[ \frac{\alpha m(\lambda_j)}{\lambda_j^2 + \alpha m(\lambda_j)} \tilde{y}_j \right] u_j + \sum_{j=p+1}^N \tilde{y}_j u_j \quad (3.38)$$

Тогда для статистики  $R_V(\gamma) = \rho_V(1/\alpha)$  и ее производной получим

$$R_V(\gamma) = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \cdot \sum_{j=1}^p \left[ \frac{m(\lambda_j)}{\gamma \lambda_j^2 + m(\lambda_j)} \right]^2 \cdot \tilde{y}_j^2, \quad (3.39)$$

$$R'_V(\gamma) = \frac{\partial R_V(\gamma)}{\partial \gamma} = -\frac{2}{\sigma_\eta^2} \cdot \sum_{j=1}^p \frac{\lambda_j^2 m^2(\lambda_j)}{[\gamma \lambda_j^2 + m(\lambda_j)]^3} \cdot \tilde{y}_j^2, \quad (3.40)$$

где  $\tilde{y}_j = \langle u_j, C_\eta^{-1/2} f \rangle$ .

Значение  $\gamma_V$ , при котором принимается гипотеза (3.27), удовлетворяет условию

$$\vartheta_p(\beta/2) \leq R_V(\gamma_V) \leq \vartheta_p(1-\beta/2), \quad (3.41)$$

а  $\vartheta_p(\beta/2)$ ,  $\vartheta_p(1-\beta/2)$  – квантили  $\chi^2$ -распределения с  $p$  степенями свободы уровней  $\beta/2$ ,  $1-\beta/2$  соответственно.

Для вычисления  $\gamma_V$  вновь используем итерационную процедуру ньютоновского типа:

$$\gamma^{(n)} = \gamma^{(n-1)} - \frac{R_V(\gamma^{(n-1)}) - p}{R'_V(\gamma^{(n-1)})}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.42)$$

с начальным значением  $\gamma^{(0)} \sim 10^{-15}$ . В качестве  $\gamma_V$  принимается значение  $\gamma^{(n)}$ , удовлетворяющее (3.41).

#### Задание 3.4.

Для построенного регуляризованного решения в лабораторной работе №2 при неполной информации (см. задание 2.4 в работе №2) используя SVD-разложение, вычислить:

- 1) параметр регуляризации  $\alpha_V$ ;
- 2) регуляризованное решение  $\Phi_{\alpha_V}$ ;
- 3) ошибку решения  $\Delta_{\alpha_j} = b_{\alpha_j} + \sqrt{V_{\xi_{\alpha_j}}}$ ,  $j = 1, \dots, M$ .

**Примечание.** При наличии научной задачи магистранта, которую можно свести к системе линейных уравнений, провести исследования этой задачи

## Практическое занятие №4

### Локальная регуляризация

#### §4.1. Векторный параметр регуляризации

Рассмотрим сглаживающий функционал вида

$$F_\alpha[\varphi] = \|\tilde{f} - K\varphi\|_{W_f}^2 + \alpha \cdot \sum_{j=2}^M (\varphi_j - \varphi_{j-1})^2, \quad (4.1)$$

в котором в качестве матрицы  $W_\varphi$  используется трехдиагональная матрица (размером  $M \times M$ ) вида

$$W_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Вместо скалярного параметра регуляризации введем во второе слагаемое этого функционала *векторный параметр регуляризации*

$$\mu = \{\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_M\}. \quad (4.3)$$

Тогда имеем новый сглаживающий функционал:

$$F[\varphi, \mu] = \|\tilde{f} - K\varphi\|_{W_f}^2 + \sum_{j=2}^M \mu_j^2 (\varphi_j - \varphi_{j-1})^2. \quad (4.4)$$

Определив матрицу:

$$M(\mu) = \begin{pmatrix} \mu_2^2 & -\mu_2^2 & & & 0 \\ -\mu_2^2 & (\mu_2^2 + \mu_3^2) & -\mu_3^2 & & \\ 0 & -\mu_3^2 & (\mu_3^2 + \mu_4^2) & -\mu_4^2 & \\ & & \ddots & & \ddots \\ 0 & & & -\mu_M^2 & \mu_M^2 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

функционал (4.4) можно переписать в виде:

$$F[\varphi, \mu] = \|\tilde{f} - K\varphi\|_{W_f}^2 + \|\varphi\|_{M(\mu)}^2. \quad (4.6)$$

Введем функционал

$$\Gamma[\mu] = \gamma_1^2 \cdot \sum_{j=2}^M (\mu_j - \gamma_0)^2 + \gamma_2^2 \cdot \sum_{j=3}^M (\mu_j - \mu_{j-1})^2 \quad (4.7)$$

и ограничения  $0 \leq \mu_j \leq \gamma_0, j = 2, \dots, M$ .

Введем новый сглаживающий функционал (назовем его *локальным сглаживающим функционалом*)

$$\Phi[\varphi, \mu] = F[\varphi, \mu] + \Gamma[\mu] \quad (4.8)$$

и определим точку его минимума  $(\varphi_\mu^*, \mu^*)$  из условий:

$$\frac{\partial \Phi[\varphi, \mu]}{\partial \varphi_j} = 0, \quad j = 1, \dots, M; \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \Phi[\varphi, \mu]}{\partial \mu_j} = 0, \quad j = 2, \dots, M. \quad (4.10)$$

Точку минимума  $(\varphi^*, \mu^*)$  функционала  $\Phi[\varphi, \mu]$  ищем итерационным путем из решения совместных систем вида

$$\sum_{j=1}^M (K^T W_f K + M(\mu^{(l)}))_{i,j} \varphi_j^{(l)} = (K^T W_f \tilde{f})_i, \quad i = 1, \dots, M, \quad (4.11)$$

## Практическое занятие №5

### Дескриптивные алгоритмы решения СЛАУ

#### § 5.1. Глобальный дескриптивный регуляризирующий алгоритм

Пусть вектор решения  $\varphi$  принадлежит выпуклому множеству  $\Phi$ , задаваемому системой линейных неравенств:

$$G\varphi \leq g, \quad (5.1)$$

где  $G$  – матрица ограничений размером  $L \times M$ ;  $g$  – вектор размерности  $L$ . Ограничения (5.1) определяют допустимое множество векторов  $\varphi$ , из которых должен находиться вектор регуляризованного решения. Например, для условия неотрицательности проекций вектора  $\varphi$  ( $\varphi_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, M$ ) система неравенств (5.1) преобразуется к виду

$$-I_{M \times M} \cdot \varphi \leq 0_M, \quad (5.3)$$

здесь  $I_{M \times M}$  – единичная матрица;  $0_M$  – нулевой вектор.

В этом случае искомый вектор  $\varphi_\alpha^*$ , будет являться решением следующей задачи квадратичного программирования :

$$\inf \left[ \|\tilde{f} - K\varphi\|_{C_n^{-1}}^2 + \alpha \|\varphi\|_{W_\varphi}^2 \right] \quad (5.3)$$

при ограничениях  $G\varphi \leq g$ .

Для приведения исходной задачи к двойственной вновь запишем диагональную матрицу  $R_{p\alpha}$  (см. (2.49)):

$$R_{p\alpha} = \text{diag}\{r_1(\alpha), r_2(\alpha), \dots, r_p(\alpha)\} \quad (5.4)$$

размером  $p \times p$  с элементами

$$r_j(\alpha) = \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + \alpha m(\lambda_j)}, \quad j = 1, \dots, p, \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} & \left[ (\varphi_2^{(l)} - \varphi_1^{(l)})^2 + \gamma_1^2 + 2\gamma_2^2 \right] \cdot \mu_2^{(l+1)} - \gamma_2^2 \cdot \mu_3^{(l+1)} = \gamma_1^2 \gamma_0; \\ & -\gamma_2^2 \cdot \mu_{i-1}^{(l+1)} + \left[ (\varphi_i^{(l)} - \varphi_{i-1}^{(l)})^2 + \gamma_1^2 + 2\gamma_2^2 \right] \cdot \mu_i^{(l+1)} - \gamma_2^2 \cdot \mu_{i+1}^{(l+1)} = \gamma_1^2 \gamma_0, i = 3, \dots, M-1; \\ & -\gamma_2^2 \cdot \mu_{M-1}^{(l+1)} + \left[ (\varphi_M^{(l)} - \varphi_{M-1}^{(l)})^2 + \gamma_1^2 + 2\gamma_2^2 \right] \cdot \mu_M^{(l+1)} = \gamma_1^2 \gamma_0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\mu_i^{(l+1)} = \begin{cases} \mu_i^{(l+1)}, & \text{если } 0 \leq \mu_i^{(l+1)} \leq \gamma_0; \\ 0, & \text{если } \mu_i^{(l+1)} < 0; \\ \gamma_0, & \text{если } \mu_i^{(l+1)} > \gamma_0. \end{cases}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

$$\gamma_0 = \sqrt{\alpha_w}. \quad (4.14)$$

Условием прекращения итераций является одновременное выполнение условий:

$$\frac{\|\mu^{(l)} - \mu^{(l-1)}\|}{\|\mu^{(l)}\|} \leq \varepsilon; \quad \frac{\|\varphi^{(l)} - \varphi^{(l-1)}\|}{\|\varphi^{(l)}\|} \leq \varepsilon, \quad (4.15)$$

где  $\varepsilon$  – достаточно малая величина – порядка  $10^{-4} \div 10^{-3}$ . В качестве начального значения  $\mu^{(0)}$  примем вектор с проекциями

$$\mu_i^{(0)} = \frac{\sqrt{\alpha_w}}{2}, \quad i = 2, \dots, M, \quad (4.16)$$

где  $\alpha_w$  – оценка  $\alpha_{opt}$  по критерию оптимальности (см. п. 3.1).

Значения  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в системе (4.12) равны:  $\gamma_1 = 5, \gamma_2 = 0.5$

#### Задание 4.1.

По формулам (4.11) – (4.16) построить локальное регуляризованное решение, используя найденное в лабораторной работе №3 (см. задание 3.1) глобальное регуляризованное решение.

где  $p$  – ранг матрицы, и введем вектор  $z_p = |y_1, y_2, \dots, y_p|^T$ , составленный из первых  $p$  проекций вектора  $y = U^T C_\eta^{-1/2} \tilde{f}$ .

Тогда регуляризованное решение  $\varphi_\alpha$ , доставляющее минимум функционалу (5.3) с матрицей

$$W_\varphi = V_p \text{diag}\{m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_p)\} V_p^T,$$

определяется как  $\varphi_\alpha = V_p x_\alpha$ , где  $V_p$  – матрица размером  $M \times p$ , составленная из  $p$  первых столбцов матрицы  $V$ . Вектор

$$x_\alpha = R_{p\alpha} z_p, \quad (5.5)$$

состоящий из  $p$  проекций, доставляет минимум функционалу:

$$F_\alpha(x) = x^T R_{p\alpha}^{-1} x - 2x^T z_p + \text{const}. \quad (5.6)$$

Введя обозначения  $D_{p\alpha} = 2R_{p\alpha}^{-1}$ ,  $d_p = -2z_p$ , с учетом  $\varphi_\alpha = V_p x_\alpha$  и ограничений (5.1), приходим к задаче квадратичного программирования, а именно:

**Задача А.** Найти вектор  $x_\alpha^*$  размерности  $M$ , доставляющий минимум функционалу

$$F_\alpha(x) = \frac{1}{2} x^T D_{p\alpha} x + x^T d_p + \text{const} \quad (5.7)$$

при ограничении

$$GV_p x \leq g. \quad (5.8)$$

Двойственная по Лагранжу задача формулируется следующим образом:

**Задача В.** Найти вектор  $\mu^*$  размерности  $L$ , доставляющий минимум функционалу

$$\tilde{\psi}_\alpha(\mu) = \frac{1}{4} \mu^T G V_p R_\alpha V_p^T G^T \mu - \mu^T (-g + G V_p x_\alpha) + \text{const} \quad (4.1.15)$$

при ограничении

$$\mu \geq 0_L \quad (5.9)$$

Решение задачи В можно осуществить используя известные алгоритмы квадратичного программирования.

После вычисления  $\mu^*$  решение  $x_\alpha^*$  задачи А находится из выражения

$$x_\alpha^* = x_\alpha - \frac{1}{2} R_{p\alpha} V_p^T G^T \mu^* \quad (5.10)$$

и состоит из двух слагаемых: регуляризованного решения  $x_\alpha$  (5.5), полученного безусловной минимизацией функционала (5.6), и вектора, зависящего от решения  $\mu^*$  двойственной задачи В. Очевидно, что если  $\mu^* = 0$ , то  $x_\alpha^* = x_\alpha$ .

Вектор дескриптивного решения находится как

$$\varphi_\alpha^* = V_p x_\alpha^*. \quad (5.11)$$

Таким образом, построение дескриптивного решения  $\varphi_\alpha^*$  можно представить следующими шагами:

- выполнение сингулярного разложения  $C_\eta^{-1/2} K = U \Lambda V^T$ , где  $V_\eta = \sigma_\eta^2 C_\eta$ ,  $\lambda_j$  – сингулярные числа,  $U, V$  – ортогональные матрицы;
- вычисление вектора  $x_\alpha$  из условия минимума функционала  $F_\alpha(x)$  (см. (5.5)), т.е.

$$x_\alpha = \text{diag} \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \alpha m(\lambda_1)}, \dots, \frac{\lambda_p}{\lambda_p^2 + \alpha m(\lambda_p)} \right\} \cdot z_p, \quad (5.12)$$

где  $p$  – ранг матрицы системы. При этом вектор  $\alpha$  осуществляется одним из способов, описанных в лабораторной работе №3;

- проверка ограничений задачи (5.8). Если ограничения (5.8) выполняются, то  $x_\alpha^* = x_\alpha$ ;
- если ограничения (5.8) не выполняются, то решение вариационной задачи В;



- формирование вектора  $x_\alpha^*$ , определяемого выражением (5.10);
- вычисление вектора дескриптивного решения (5.11).

### Задание 5.1.

Построить дескриптивный алгоритм решения СЛАУ. Обратиться к выполненному заданию 3.1. Задать ограничения на искомое решение и найти глобальное регуляризованное решение, удовлетворяющее заданным ограничениям.

### § 5.2. Локальный дескриптивный регуляризирующий алгоритм

Запишем оптимальное решение (см. (2.18)) для  $l$ -й итерации

$$x_s^{(l)} = R_{pS}^{(l)} z_p, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (5.13)$$

где диагональная матрица  $R_{pS}^{(l)}$  (см. (2.19))

$$R_{pS}^{(l)} = \text{diag}\{r_{S_1}^{(l)}, r_{S_2}^{(l)}, \dots, r_{S_p}^{(l)}\} \quad (5.14)$$

размером  $p \times p$  имеет элементы

$$r_{S_j}^{(l)} = \frac{1}{\lambda_j (1 + \widehat{S}_j^{(l)})}, \quad j = 1, \dots, p, \quad (5.15)$$

а вектор  $z_p = [\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_p]^T$  составлен из первых  $p$  проекций вектора  $\tilde{y} = U^T C_\eta^{-1/2} \tilde{f}$ .

Величины  $\widehat{S}_j^{(l)}$  определяются следующим выражением:

$$\widehat{S}_j^{(l+1)} = \begin{cases} S_{j,1}^{*(l)}, & \text{если } \tilde{S}_j \leq 1/4 \text{ и } 0 \leq S_j^{(l)} < S_{j,2}^{*(l)}; \\ S_{j,2}^{*(l)}, & \text{если } \tilde{S}_j \leq 1/4 \text{ и } S_j^{(l)} = S_{j,2}^{*(l)}; \\ 0, & \text{если } \tilde{S}_j \leq 1/4 \text{ и } S_j^{(l)} > S_{j,2}^{*(l)}; \\ 0, & \text{если } \tilde{S}_j > 1/4. \end{cases} \quad (5.16)$$

Здесь  $S_{j,1}^{*(l)}$  и  $S_{j,2}^{*(l)}$  определяются как корни квадратного уравнения

$$(S_j^{*(l)})^2 + \left(2 - \frac{1}{\tilde{S}_j}\right) S_j^{*(l)} + 1 = 0, \quad (5.17)$$

при этом  $S_{j,1}^{*(l)} \leq S_{j,2}^{*(l)}$ . В формулах (5.19) и (5.20) введены величины:

$$\tilde{S}_j = \sigma_\eta^2 / \tilde{y}_j^2, \quad S_j^{(l)} = \sigma_\eta^2 / (\lambda_j x_j^{(l)})^2, \quad j = 1, \dots, p, \quad (5.18)$$

где  $x_j^{(l)}$  – проекции вектора  $x^{(0)} = V_p^T \varphi^{(0)}$ . В качестве «стартового» решения  $\varphi^{(0)}$  будем использовать регуляризованное решение  $\varphi_\alpha$ , построенное при  $\alpha = \alpha_w$ .

Итерационный процесс прекращаем при одновременном выполнении условий:

$$\frac{\|\widehat{S}^{(l)} - \widehat{S}^{(l-1)}\|}{\|\widehat{S}^{(l)}\|} \leq \varepsilon; \quad \frac{\|x_s^{(l)} - x_s^{(l-1)}\|}{\|x_s^{(l)}\|} \leq \varepsilon, \quad (5.19)$$

где  $\varepsilon$  – достаточно малая величина – порядка  $10^{-4} \div 10^{-3}$ .

Введем обозначения:  $d_p = -2z_p$ ,  $D_{pS} = 2R_{pS}^{-1}$ . С учетом  $\varphi_S = V_p x_S$ , приходим к следующей задаче квадратичного программирования:

**Задача А.** Найти вектор  $x_S^*$  размерности  $p$ , доставляющий минимум функционалу

$$F_S(x) = \frac{1}{2} x^T D_{pS} x + x^T d_p + \text{const} \quad (5.20)$$

при ограничении

$$GV_p^T x_S \leq g. \quad (5.21)$$

Для данной прямой задачи сформулируем двойственную по Лагранжу задачу

**Задача В.** Найти вектор  $\mu^*$  размерности  $L$ , доставляющий минимум

$$\tilde{\psi}_S(\mu) = \frac{1}{4} \mu^T G V_p R_{ps} V_p^T G^T \mu - \mu^T (-g + G V_p x_S) + const \quad (5.22)$$

при ограничении

$$\mu \geq 0_L. \quad (5.23)$$

Решая данную задачу методами математического программирования, находим вектор  $\mu^*$  и вектор

$$x_S^* = x_S - \frac{1}{2} R_{ps} V_p^T G^T \mu, \quad (5.24)$$

где  $x_S$  определяется из (5.16). Очевидно, что если  $\mu^* = 0$ , то  $x_S^* = x_S$ .

Таким образом, построение дескриптивного локального регуляризованного решения  $\varphi_S^*$ , удовлетворяющего ограничениям  $G\varphi \leq g$ , можно представить следующими этапами:

- вычисляется вектор  $x_S$  локального регуляризованного решения (см. (5.13)), удовлетворяющий ограничениям (5.19);
- проверяются ограничения  $G V_p x_S \leq g$ ;
- если эти ограничения выполняются, то  $x_S^* = x_S$ ;
- если ограничения нарушаются, то находится решение  $\mu^*$  двойственной задачи (5.22), (5.23) и вычисляется вектор  $x_S^*$  по формуле (5.24);
- строится вектор решения

$$\varphi_S^* = V_p x_S^*. \quad (5.25)$$

### Задание 5.2.

Построить локальный дескриптивный алгоритм решения СЛАУ. Обратиться к заданию 5.1.

### Литература

1. Воскобойников Ю.Е., Мицель А.А. Современные проблемы прикладной математики. Часть 1. Лекционный курс: учебное пособие/ Томский гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР). – Томск: 2012. – 136 с.